بسم الله الرحمن الرحیم

اَللّٰهُمَّ صَلِّ عَلىٰ مُحَمَّدٍ وَ آلِ مُحَمَّدٍ وَ عَجِّلْ فَرَجَهُمْ

هندسه (۱)

رشتهٔ ریاضی و فیزیک

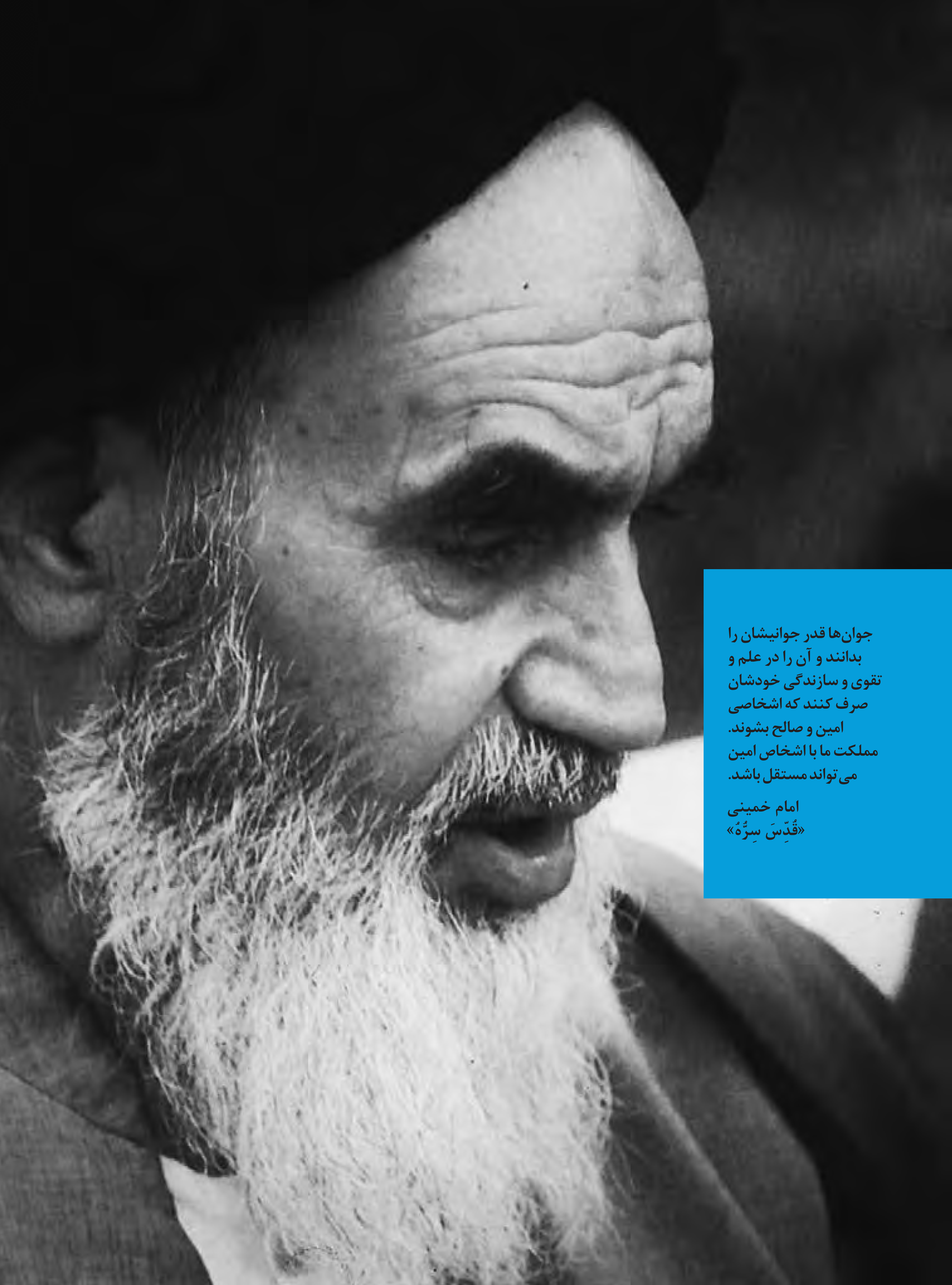
پایهٔ دهم

دورهٔ دوم متوسطه

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب: هندسه(۱) ـ پایهٔ دهم دورهٔ دوم متوسطه ـ ۱۱۰۲۱۳
پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف: حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، طیبه حمزه‌بیگی، خسرو داودی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیدصالحی، احمد شاهورانی، میرشهرام صدر، شادی صفی‌نیا، اکرم قابل‌رحمت، محمد مقاصدی (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
زهرا رحیمی، محمدرضا سیدصالحی، هوشنگ شرقی، محمود نصیری (اعضای گروه تألیف) ـ سیداکبر میرجعفری (ویراستار)
مدیریت آماده‌سازی هنری: ادارهٔ کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
شناسه افزوده آماده‌سازی: احمدرضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ) ـ مجید ذاکری یونسی (مدیر هنری) ـ مجتبی زند (طراح گرافیک، طراح جلد و صفحه‌آرا) ـ سیده‌فاطمه محسنی، فاطمه باقری‌مهر، زهرا رشیدی‌مقدم، علی‌نجمی، سپیده ملک‌ایزدی، حمید ثابت کلاچاهی (امور آماده‌سازی)
نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
تلفن: ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
وبگاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir
ناشر: شرکت چاپ ونشر کتاب‌های درسی ایران تهران: کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۵ـ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۹ـ۳۷۵۱۵
چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»
سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ هشتم ۱۴۰۲

شابک ۲ـ۲۵۰۱ـ۰۵ـ۹۶۴ـ۹۷۸
ISBN: 978-964-05-2501-2



جوان‌ها قدر جوانیشان را
بدانند و آن را در علم و
تقوی و سازندگی خودشان
صرف کنند که اشخاصی
امین و صالح بشوند.
مملکت ما با اشخاص امین
می‌تواند مستقل باشد.

امام خمینی
«قُدِّسَ سِرُّهُ»

فهرست

پیشگفتار

قلمرو آموزش ریاضی از یک‌سو درک مفاهیم ریاضی شامل اعداد و محاسبات عددی، جبر و نمایش نمادین (الگوها، رابطه‌ها، تابع‌ها)، **هندسه** و اندازه‌گیری، داده‌ها و آمار و احتمال را در بر می‌گیرد و از سوی دیگر در این حوزه، دانش‌آموزان باید با فرایندهای ریاضی نظیر حل مسئله و به‌کارگیری راهبردهای حل مسئله، مدل‌سازی، استدلال، تفکر نقاد و استدلال منطقی، تفکر تجسمی یا دیداری، تفکر خلاق، اتصال و پیوندهای موضوعی و مفهومی ریاضی، گفتمان ریاضی، تصمیم‌گیری و تصمیم‌سازی، تخمین زدن و دقت یافتن آشنا شوند و در آنها مهارت یابند (سند برنامه درسی ملی).

از دید برخی پژوهشگران، هندسه، توانایی مشاهده کردن، تصور کردن و فکر کردن است. تقویت تفکر و حس زیبایی‌شناسی از موضوعاتی است که آموزش هندسه به دنبال آن است. از آنجا که موضوع هندسه بررسی فضا و شکل‌ها است و همهٔ پدیده‌ها در فضا رخ می‌دهند، هندسه به‌گونه‌ای زمینهٔ همهٔ علوم طبیعی است. همچنین هندسه بستر مناسب بروز و تقویت خلاقیت و تخیل انسان را فراهم می‌آورد.

برخی اهداف مهم آموزش هندسه به قرار زیر است :

- زمینه‌سازیِ تقویت ذهن، خلاقیت و استدلال دانش‌آموزان؛
- تقویت قدرت درک هنر و حس زیبایی‌شناسی؛
- به‌کارگیری هندسه در زندگی روزمره؛
- آشنایی با آثار هنری برجسته و درک ایده‌های هندسی آنها؛
- شناسایی و تحلیل ویژگی‌های شکل‌های هندسی در صفحه و فضا؛
- تقویت تفکر تجسمی و مدل‌سازی هندسی در حل مسائل.

ساختار کتاب از بخش‌هایی چون «فعّالیت»، «کار در کلاس»، «مثال» و «تمرین» تشکیل شده است.

آنچه در هر فعّالیت به‌طور عمده مدّ نظر بوده، آشنایی دانش‌آموزان با مفهوم درسی و سهیم بودن در ساختن دانش مورد نظر است. فعّالیت‌ها شامل مراحلی مانند درک کردن، کشف کردن، حل مسئله، استدلال کردن، بررسی کردن، حدس و آزمایش، توضیح هر راه حل، مرتب کردن، قضاوت دربارهٔ آن و مقایسهٔ راه حل‌های مختلف است. هدایت فعّالیت‌ها توسط معلّم انجام می‌پذیرد و هرجا لازم باشد، راهنمایی توسط معلّم ارائه خواهد شد. در برخی موارد، فعّالیت‌ها ساده و آسان نیست و صد البته اجرای مناسب دارای ارزش زیادی خواهد بود. این فعّالیت‌ها در حدّ متوسط طراحی شده‌اند. معلّم می‌تواند با توجه به زمان و توانایی دانش‌آموزانش آنها را غنی‌تر کند یا با ارائهٔ توضیحاتی بیشتر و تغییراتی، فعالیت را ساده‌تر نماید.

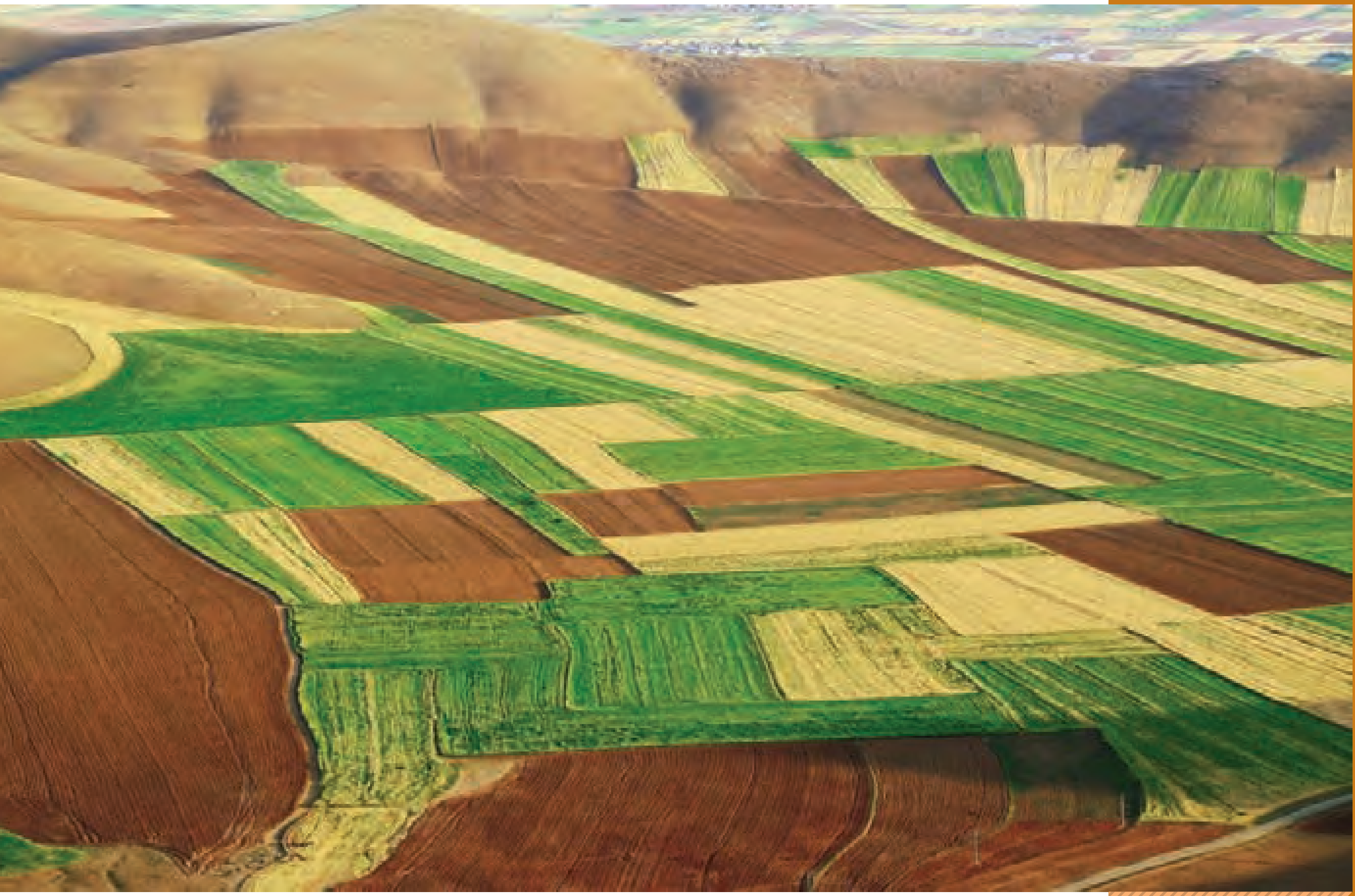
هنگام انجام فعّالیت، هدایتِ گفت‌وگوی کلاسی یا گفتمان ریاضی به عهدهٔ معلّم است که در آن دانش‌آموزان به ارائهٔ دیدگاه‌ها و دفاع از افکار خود و نیز قضاوت و ارزیابی افکار و روش‌های ریاضی دیگر دانش‌آموزان می‌پردازند. به‌طور خلاصه فراهم کردن فرصت‌های یادگیری و دادن مجال به دانش‌آموز برای اینکه خود به کشف مفهوم بپردازد، می‌تواند یکی از دغدغه‌های همکاران عزیزمان باشد.

کار در کلاس با هدف تثبیت و تعمیق و در مواردی تعمیم یادگیری طراحی شده است. انتظار این است که دانش‌آموزان بیشترین سهم را در حل آن داشته باشند. حلّ تمرین به عهدهٔ دانش‌آموزان است؛ اما ارائه و بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان در کلاس ضروری است.

فصل اوّل

۱

ترسیم‌های هندسی و استدلال



هندسه و به‌ویژه ترسیم‌های هندسی از دیرباز مورد استفاده بشر بوده‌است.

درس اوّل

ترسیم‌های هندسی

انسان از دوران باستان تاکنون همواره از هندسه و به‌ویژه از ترسیم‌های هندسی برای حل مسائل مختلف یاری گرفته است.

از تقسیم‌بندی زمین‌های کشاورزی تا طراحی انواع ابزارهای کاربردی پیشرفته کنونی، همگی نیازمندِ ترسیم‌های هندسی است.

فعالیت

(برای مراحل زیر از خط‌کش و پرگار استفاده کنید.)

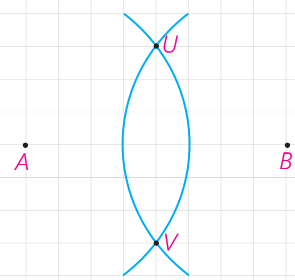
۱ــ نقطه‌ای مانند O را در صفحه درنظر بگیرید و نقاطی را مشخص کنید که فاصلهٔ یکسانی از نقطهٔ O دارند. (مثلاً همهٔ نقاطی که فاصله‌شان از نقطهٔ O برابر ۲ سانتی‌متر است.)



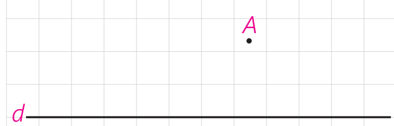
۲ــ خط d را در نظر بگیرید و تمام نقاطی که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از خط d قرار دارند را مشخص کنید.



۳ــ نقاط A و B را درنظر بگیرید. دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول پاره‌خط AB باز کنید و یک‌بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B و با همان شعاع قبلی کمان بزنید تا یکدیگر را در نقاط U و V قطع کنند. U و V چه ویژگی مشترکی دارند؟



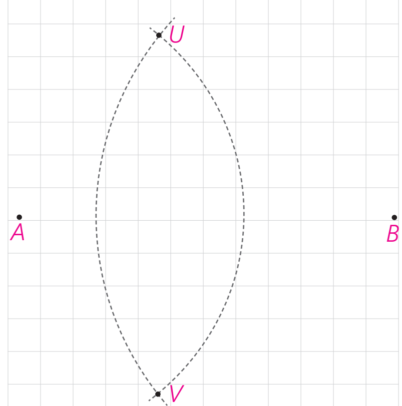
۴ــ نقطهٔ A، مانند شکل مقابل به فاصلهٔ ۱ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. نقاطی از خط d را بیابید که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از نقطهٔ A باشند.



۵ــ نقاط A و B را به فاصلهٔ ۵ سانتی‌متر از هم درنظر بگیرید. دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ ۳ سانتی‌متر باز کنید و از نقطهٔ A یک کمان بزنید. سپس دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ ۴ سانتی‌متر باز کنید و از نقطهٔ B یک کمان بزنید.

الف) نقاط روی کمان اول چه ویژگی مشترکی دارند؟

ب) نقاط روی کمان دوم چه ویژگی مشترکی دارند؟



پ) نقاط تقاطع دو کمان فاصله‌شان از نقاط A و B چگونه است؟ برای اینکه چنین نقاط تقاطعی وجود داشته باشند، اندازهٔ شعاع آنها و فاصلهٔ نقاط A و B چه شرطی باید داشته باشند؟

ت) طول اضلاع مثلث AUB چقدر است؟

کاردرکلاس

۱ــ دو نقطه مانند A و B را به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از هم درنظر بگیرید. نقاطی را بیابید که فاصله‌شان از A، ۲ و از B، ۲/۵ سانتی‌متر باشد.

۲ــ توضیح دهید که چگونه می‌توان مثلثی به طول اضلاع ۴ و ۵ و ۶ واحد رسم کرد.

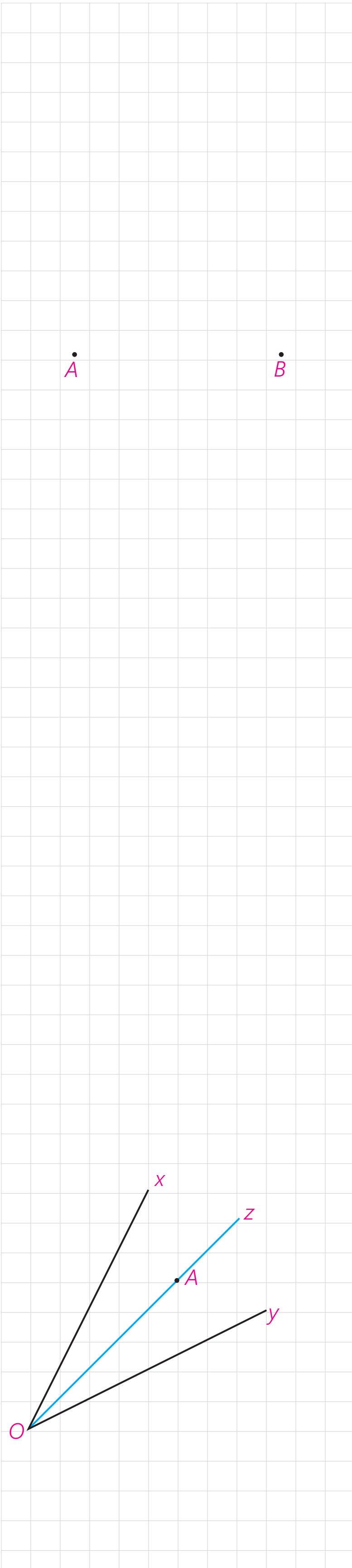
۳ــ نقاط A و B به فاصلهٔ ۷ سانتی‌متر از هم قرار دارند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطهٔ A برابر ______ و از نقطهٔ B برابر ______ باشد.

جاهای خالی را به‌گونه‌ای کامل کنید که مسئلهٔ زیر:

الف) دو جواب داشته باشد.

ب) یک جواب داشته باشد.

پ) جواب نداشته باشد.



برخی خواص نیمساز و ترسیم آن

فعالیت

۱ــ زاویهٔ xOy و نیم‌خط Oz را نیمساز آن درنظر بگیرید. فرض کنید نقطهٔ A نقطه‌ای دلخواه روی Oz باشد. ثابت کنید که فاصلهٔ نقطهٔ A از دو ضلع زاویهٔ xOy یکسان است. (یعنی اگر از نقطهٔ A عمودهایی بر نیم‌خط‌های Ox، Oy رسم کنیم طول آنها باهم برابر است.)

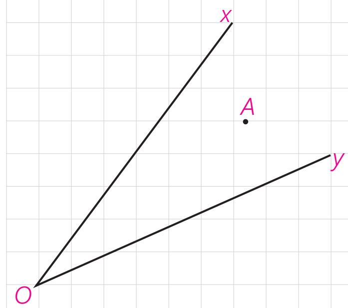
نتیجه ۱

اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد ______ .

۲ــ زاویهٔ xOy و نقطهٔ A را چنان درنظر می‌گیریم که فاصلهٔ نقطهٔ A از نیم‌خط‌های Oy و Ox باهم برابر باشد.

نشان دهید که نقطهٔ A روی نیمساز زاویهٔ xOy قرار دارد.

(راهنمایی: پاره‌خط OA، و دو عمود از نقطهٔ A بر خطوط Ox و Oy رسم کنید و نشان دهید پاره‌خط OA همان نیمساز xOy است.)



نتیجه ۲

اگر نقطه‌ای به فاصلهٔ یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد، آن نقطه .... قرار دارد.

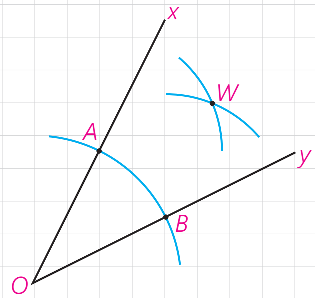
نتیجه

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی .... یک زاویه قرار داشته باشد، .... و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی .... آن زاویه قرار دارد.

فعالیت

۱ــ زاویهٔ xOy را درنظر بگیرید. دهانهٔ پرگار را کمی باز کنید و به مرکز O کمانی بزنید تا نیم‌خط‌های Ox و Oy را به ترتیب در نقاط A و B قطع کند.

ــ طول پاره‌خط‌های OA و OB نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟



۲ــ دهانهٔ پرگار را کمی باز کنید (بیش از نصف طول AB) و یک بار به مرکز A و بار دیگر با همان اندازه و به مرکز B یک کمان بزنید تا دو کمان مانند شکل در نقطه‌ای مانند W همدیگر را قطع کنند.

ــ طول پاره‌خط‌های AW و BW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

ــ پاره‌خط‌های WA و WB و WO را رسم کنید. دو مثلث OAW و OBW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

ــ اندازهٔ زاویه‌های AOW و BOW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

ــ پاره‌خط OW برای زاویهٔ xOy چه نوع پاره‌خطی است؟

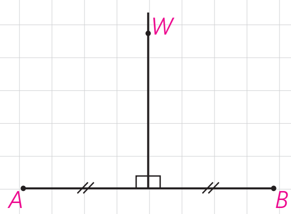
کار در کلاس

روش رسم نیمساز یک زاویه را توضیح دهید.

برخی خواص عمودمنصف و ترسیم آن

فعالیت

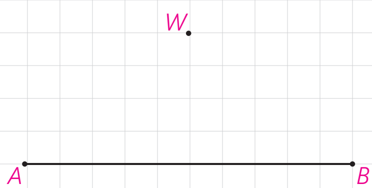
۱ــ پاره‌خط AB و عمودمنصف آن را مانند شکل مقابل درنظر بگیرید و فرض کنید W نقطه‌ای روی عمودمنصف AB باشد. نشان دهید نقطهٔ W از دوسر پاره‌خط AB به یک فاصله است.



نتیجه ۱

اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک‌پاره‌خط قرار داشته باشد، از دوسر آن پاره‌خط ....

۲ــ پاره‌خط AB و نقطهٔ W را به‌گونه‌ای درنظر بگیرید که نقطهٔ W از A و B به یک فاصله باشد (یعنی WA = WB) نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد.



(راهنمایی: از نقطهٔ W به A و B و به وسط پاره‌خط AB وصل کنید و نشان دهید مثلث‌های ایجاد شده باهم هم‌نهشت هستند و از این مطلب استفاده کنید و نشان دهید W روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.)

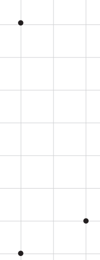
نتیجه ۲

اگر نقطه‌ای از دوسر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد ....

نتیجه

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد .... و هر نقطه‌که .... روی عمودمنصف ....

فعالیت



۱ــ یک نقطه را در صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از نقطه موردنظر بگذرد؟

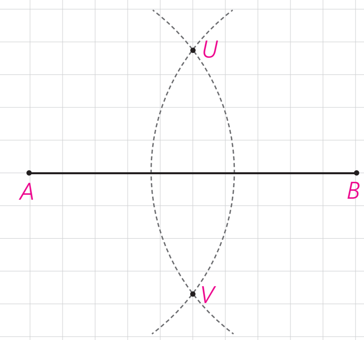
۲ــ دو نقطه را در یک صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن دو نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از هر دو نقطهٔ موردنظر بگذرد؟

۳ــ به نظر شما برای اینکه یک خط به‌طور کامل مشخص باشد، حداقل چند نقطه از آن خط را باید داشته باشیم؟

فعالیت

پاره‌خط AB را مانند شکل مقابل درنظر بگیرید.

۱ــ دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یک بار از نقطهٔ A و بار دیگر با همان اندازه از نقطهٔ B کمان بزنید تا یکدیگر را در دو نقطه مانند U و V قطع کنند.



۲ــ طول پاره‌خط‌های AU و BU نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

۳ــ طول پاره‌خط‌های AV و BV نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

۴ــ آیا می‌توان گفت نقاط U و V روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند؟ چرا؟

۵ــ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید.

کار در کلاس

مراحل رسم عمودمنصف یک پاره‌خط را توضیح دهید.

رسم خط عمود بر یک خط و رسم خط موازی با یک خط

فعالیت

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن

خط d و نقطهٔ M را روی آن، مانند شکل مقابل درنظر بگیرید. می‌خواهیم خطی بکشیم که از M بگذرد و بر d عمود باشد.



۱ــ به کمک پرگار چگونه می‌توانید نقاط A و B را روی خط d بیابید؛ به‌گونه‌ای که M وسط پاره‌خط AB باشد.

۲ــ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید.

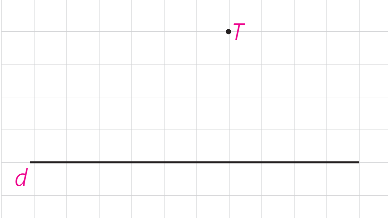
۳ــ عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که بر خط d ______ و از نقطهٔ ______ .

کار در کلاس

مراحل رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن را توضیح دهید.

فعالیت

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیر واقع بر آن



خط d و نقطهٔ T را که غیر واقع بر آن است، مانند شکل مقابل درنظر بگیرید.
می‌خواهیم خطی بکشیم که از T بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۱ــ به کمک پرگار چگونه می‌توانید نقاط A و B را روی خط d به‌گونه‌ای بیابید که از نقطهٔ T به یک فاصله باشند.

۲ــ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید.

۳ــ آیا عمودمنصف پاره‌خط AB از نقطهٔ T می‌گذرد؟ چرا؟

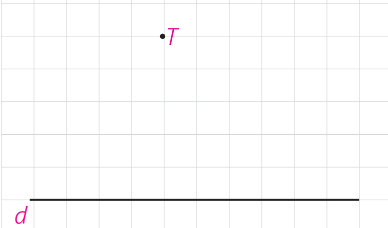
عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که بر خط d .... و از نقطهٔ ....

کاردرکلاس

روش رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای غیرواقع بر آن را توضیح دهید.

فعالیت

رسم خط موازی با خط داده شده از یک نقطهٔ غیرواقع بر آن



خط d و نقطه T مانند شکل مقابل داده شده‌اند.
می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطهٔ Tبگذرد و با خط d موازی باشد.

۱ــ خط d_1 را به‌گونه‌ای رسم کنید که از نقطهٔ T بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۲ــ خط d_2 را به‌گونه‌ای رسم کنید که از نقطهٔ T بگذرد و بر خط d_1 عمود باشد.

۳ــ خط d_2 نسبت به خط d چه وضعیتی دارد؟ چرا؟ (خط d_1 را مورّب درنظر بگیرید.)

کاردرکلاس

روش رسم خط موازی با یک خط از نقطه‌ای غیرواقع بر آن را توضیح دهید.

تمرین

۱ــ فرض کنیم هر چهار ضلعی که قطرهایش منصف هم باشند، متوازی‌الاضلاع است. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۷ باشد. چند متوازی‌الاضلاع به طول قطرهای ۴ و ۷ می‌توان رسم کرد؟

۲ــ فرض کنیم هر چهار ضلعی که قطرهایش باهم برابر و منصف هم باشد، مستطیل است. مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۶ سانتی‌متر باشد.

۳ــ فرض کنیم که برای لوزی‌بودن یک چهارضلعی کافی است که قطرهای آن چهارضلعی عمودمنصف یکدیگر باشند. ترسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۵ باشد.

ب) یک لوزی به طول ضلع ۵ و طول قطر ۶ رسم کنید.

۴ــ دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید.

الف) نقطه‌ای بیابید که فاصلهٔ آن از هر ضلع زاویهٔ موردنظر ۲ واحد باشد.

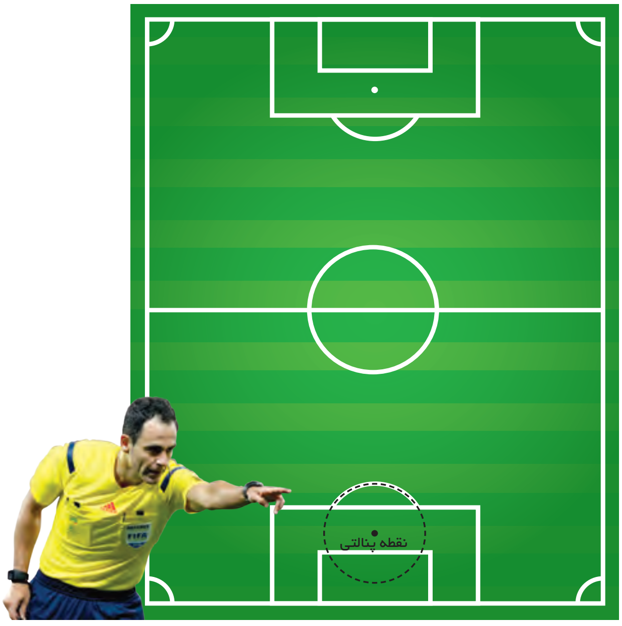
ب) با استفاده از نقطه‌ای که در قسمت (الف) یافته‌اید نیمساز زاویه را رسم کنید.

۵ــ به قسمت (الف) پاسخ دهید و از نتیجهٔ آن در قسمت (ب) استفاده کنید.

الف) وتری مانند AB از یک دایره را در نظر بگیرید. وضعیت عمودمنصف AB و مرکز دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

ب) آیا می‌دانستید که در زمین فوتبال نقطهٔ پنالتی مرکز دایره‌ای است که قسمتی از قوس آن در جلوی محوطهٔ جریمه کشیده شده است؟

یک داور فوتبال لحظه‌ای که اعلام پنالتی می‌کند، متوجه می‌شود که نقطهٔ پنالتی مشخص نیست. اگر او وسایل لازم برای کشیدن خط راست و کمان دایره را داشته باشد، چگونه می‌تواند با استفاده از قوس جلوی محوطهٔ هجده قدم، نقطهٔ پنالتی را مشخص کند.



درس دوم

استدلال



شیوهٔ درست استدلال در زندگی هر فرد و نیز در جامعهٔ انسانی اهمیت فراوانی دارد. استدلال نادرست در بسیاری مواقع، نتیجه‌گیری‌های غلط، تیره‌شدن روابط، ایجاد باورهای نادرست و پیامدهای خطرناک فردی و اجتماعی دیگری را در پی خواهد داشت و حتی ممکن است به ایجاد مشکلات شخصیتی در افراد بینجامد. ممکن است فردی با استدلال‌هایی این‌گونه، همواره راه موفقیت را بر خود بسته ببیند :

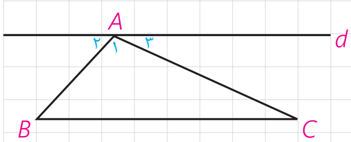
ــ من در اولین امتحانم موفق نشدم، پس در امتحان‌های بعدی نیز موفق نخواهم شد.

ــ تیم مورد علاقهٔ من از ابتدای فصل در تمام بازی‌هایش شکست خورده است، پس در بازی‌آینده نیز شکست خواهد خورد.

استقرا و استنتاج

در سال‌های قبل تاحدی با استدلال و اثبات آشنا شدید. نوعی از استدلال، که با آن روبه‌رو شدید به این صورت بود که از مشاهدات و بررسی موضوعی در چند حالت، نتیجه‌ای کلی در آن موضوع گرفته می‌شود یا به اصطلاح «از جزء به کل می‌رسیم». البته با چنین استدلالی نمی‌توان همواره به درستیِ نتیجهٔ گرفته‌شده مطمئن بود.

به‌طور مثال اگر فردی با مشاهدهٔ اینکه سه نفر از افراد یک کلاس به رنگ سبز علاقه دارند، نتیجه‌گیری کند که همهٔ افراد آن کلاس به رنگ سبز علاقه دارند، فرد مورد نظر از **استدلال استقرایی** استفاده کرده است.



$$d \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} \hat{B} = \hat{A}_۲ \\ \hat{C} = \hat{A}_۳ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ + \hat{A}_۳ = ۱۸۰^\circ$$

نوع دیگری از استدلال که با آن آشنا شدید، براساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ واقعیت‌هایی است که درستی آنها را پذیرفته‌ایم و به آن **استدلال استنتاجی** گفته می‌شود.

به‌طور مثال با دانستن رابطهٔ بین خطوط موازی و مورّب و زوایای بین آنها، اثبات اینکه مجموع زوایای داخلی یک مثلث ۱۸۰° است به طریق مقابل، یک استدلال استنتاجی است که با نمادهای ریاضی نوشته شده است. توجه کنید که استدلال استنتاجی را به صورت کلامی نیز می‌توان انجام داد.

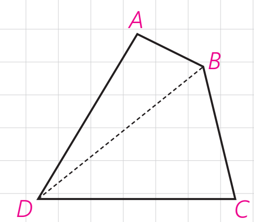
فعالیت

به استدلال‌هایی که دو دانش‌آموز برای مسئلهٔ زیر ارائه داده‌اند، دقت کنید و در مورد میزان اعتبار هریک از آنها گفت‌وگو کنید.

مسئله : مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.

پژمان : در تمام چهارضلعی‌های مربع، مستطیل، لوزی و متوازی‌الاضلاع با توجه به اینکه زاویه‌های مجاور مکمل یکدیگرند به‌سادگی ثابت می‌شود که مجموع زوایای داخلی آنها 360° است. بنابراین مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.

پیمان : می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است. یک چهارضلعی دلخواه مانند ABCD در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم و دو رأس مقابل آن، مثلاً D و B را به هم وصل می‌کنیم.



مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD با مجموع زاویه‌های داخلی دو مثلث $\overset{\Delta}{ABD}$ و $\overset{\Delta}{BCD}$ برابر است؛ بنابراین مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD برابر است با 360°.

پیمان ادعا می‌کند که با این استدلال ثابت می‌شود که مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی برابر 360° است. آیا به نظر شما این ادعای او درست است؟

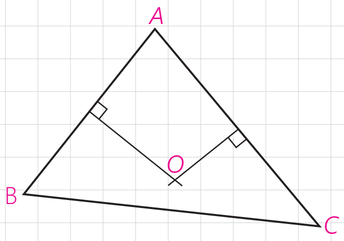
آیا همین استدلال را برای هر چهارضلعی دیگری که به شما بدهند، می‌توانید به‌کار ببرید؟ اگر جواب شما مثبت است، پس این ویژگی را که «مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD در مسئلهٔ قبل برابر 360° است»، به سایر چهارضلعی‌های محدب می‌توان تعمیم داد.

ــ نوع استدلال ارائه‌شده توسط هرکدام از دانش‌آموزان را بیان کنید.

مثال : می‌دانیم که هر نقطهٔ روی عمودمنصف یک پاره خط از دو سرِ آن پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

حال با کامل‌کردن استدلال استنتاجی بیان شده نتیجه بگیرید که **سه عمودمنصف اضلاع هر مثلث همرس‌اند (در یک نقطه به هم می‌رسند).**

استدلال : مثلث دلخواه ABC در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم. چون پاره‌خط‌های AB و AC متقاطع‌اند، عمودمنصف‌های آنها نیز در نقطه‌ای مانند O متقاطع‌اند.

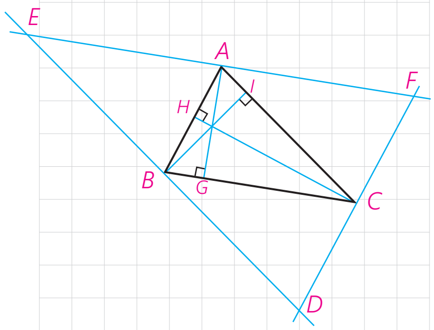


۱ــ نقطهٔ O روی عمودمنصف پاره‌خط AC است؛ بنابراین ...... = ...

۲ــ نقطهٔ O روی عمودمنصف پاره‌خط AB است؛ بنابراین ...... = ...

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم : ...... = ... بنابراین نقطهٔ O روی ...... قرار دارد. درنتیجه نقطهٔ O محل برخورد ....

مثال : استدلال استنتاجی زیر را کامل کنید و نتیجه بگیرید که سه ارتفاع هر مثلث همرس‌اند.



استدلال : مثلث دلخواه ABC را در نظر بگیرید و از هر رأس آن خطی به موازات ضلع مقابل به آن رأس رسم کنید تا مطابق شکل مقابل مثلثی مانند DEF به‌وجود آید.

مثلث ABC با مثلث‌های ACF و ABE همنهشت است (چرا؟).

بنابراین AE=BC=AF و لذا نقطهٔ A ...... پاره خط EF است.

از طرفی : $\left.\begin{array}{l} AG \perp BC \\ BC \parallel EF \end{array}\right\} \Rightarrow AG \; \square \; EF$

لذا خط AG ...... پاره‌خط EF است.

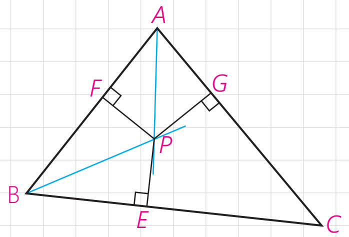
به‌طور مشابه می‌توان نشان داد :

پاره‌خط BI، ...... پاره‌خط DE است.

پاره‌خط CH، ...... پاره‌خط DF است.

بنابراین، ارتفاع‌های مثلث ABC، روی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث ...... هستند و درنتیجه همرس‌اند.

مثال : می‌دانیم که هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. حال با کامل کردن استدلال استنتاجی بیان شده نتیجه بگیرید که نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث همرس‌اند.



استدلال : مثلث دلخواه ABC در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم. نیمسازهای زوایای A و B مانند شکل یکدیگر را در نقطه‌ای مانند P قطع می‌کنند. از نقطهٔ P، مانند شکل سه عمود به اضلاع مثلث رسم می‌کنیم.

۱ــ نقطهٔ P روی نیمساز زاویهٔ A است؛ بنابراین ...... = ...

۲ــ نقطهٔ P روی نیمساز زاویهٔ B است؛ بنابراین ...... = ...

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم : ______ = ______ بنابراین نقطهٔ P روی ______

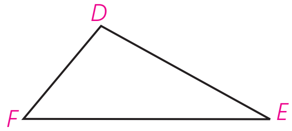
درنتیجه نقطهٔ P محل برخورد ______ .

فعالیت

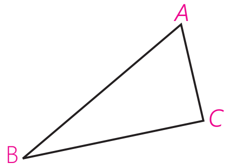
به مثلث‌های زیر دقت کنید. در سطر اولِ جدول، نام اضلاع مثلث را به ترتیب از بزرگ به کوچک و در سطر دوم، نام زاویه‌های مثلث را نیز به ترتیب از بزرگ به کوچک بنویسید.



اضلاع			
زاویه‌ها			



اضلاع			
زاویه‌ها			



اضلاع			
زاویه‌ها			

چه رابطه‌ای بین هر ضلع و زاویهٔ زیر آن وجود دارد؟

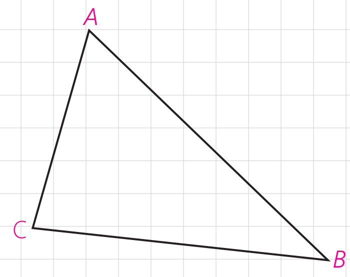
با توجه به این رابطه دربارهٔ یک مثلث دلخواه چه حدسی می‌توان زد؟

برای رسیدن به این حدس از چه نوع استدلالی استفاده کردید؟

آیا با این استدلال می‌توان مطمئن بود که حدس موردنظر درست است؟

مسئله : اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند،
زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، **بزرگ‌تر است** از زاویهٔ روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر.

استدلال : برای واضح‌شدن مطلب و کمک به حل مسئله، شکل مثلث را رسم می‌کنیم.
آیا می‌توان هر نوع مثلث دلخواهی کشید؟ مانند آنچه در مسئله گفته شده است، مثلثی می‌کشیم که دو ضلع نابرابر داشته باشد و ویژگی خاص دیگری نداشته باشد.



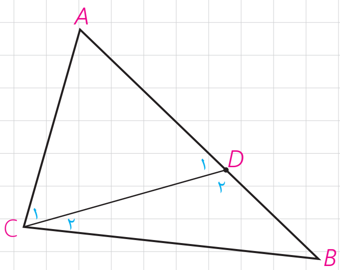
فرض: AB>AC

حکم: ______ > ______

یادآوری

۱ــ در مثلث متساوی‌الساقین زوایای روبه‌رو به ساق‌ها با هم برابرند.

۲ــ اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی یک مثلث برابر است با مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش.بنابراین هر زاویهٔ خارجی مثلث از هر زاویهٔ داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است.



می‌دانیم طبق فرض $AB>AC$ است؛ لذا می‌توانیم نقطهٔ D را روی AB جایی انتخاب کنیم که $AC=AD$

★ اندازهٔ زاویه‌های C و C_1 نسبت به هم چگونه‌اند؟ $\hat{C}_1 \square \hat{C}$

مثلث ADC چه نوع مثلثی است؟

★★ اندازهٔ زاویه‌های C_1 و D_1 نسبت به هم چگونه‌اند؟ $\hat{D}_1 \square \hat{C}_1$

زاویهٔ D_1 چه نوع زاویه‌ای برای مثلث DBC است؟

★★★ اندازهٔ زاویه‌های D_1 و B نسبت به هم چگونه‌اند؟ $\hat{B} \square \hat{D}_1$

از ★ و ★★ و ★★★ چه نتیجه‌ای دربارهٔ اندازهٔ زاویه‌های B و C می‌توان گرفت؟

$\hat{B} \square \hat{C}$

همان‌طور‌که مشاهده کردید در مثلثی مانند $\overset{\Delta}{ABC}$ فرض کردیم که ضلع $AB>AC$ است و نشان دادیم : زاویهٔ روبه‌رو به $AC >$ زاویهٔ روبه‌رو به AB است.

چرا می‌توان این موضوع را دربارهٔ تمام مثلث‌هایی که دو ضلع نابرابر دارند، پذیرفت؟

برخی نتایج مهم و پرکاربرد که مانند مسئلهٔ قبل با استدلال استنتاجی به‌دست می‌آید، **قضیه** نامیده می‌شود.



قضیه ۱: اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند،
زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویهٔ روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر.

فرض: $AB<AC$
حکم: $\hat{C}<\hat{B}$

ــ بار دیگر به آنچه انجام شد، دقت کنید. بررسی اندازه‌های اضلاع و زوایای مثلث‌های مختلف، دقت در کشف رابطه میان این اندازه‌ها، حدس در برقراری رابطه‌ای خاص، طرح مسئله، اثبات درستی مسئله و نهایتاً نتیجه‌گیری.

بسیاری از نتایج ریاضی، طی چنین مراحلی توسط علاقه‌مندان به ریاضی به‌دست آمده است. مراحل این روند و حتی حدس‌ها و تفکراتی که درست نیست اما در این مراحل صورت می‌گیرد، می‌تواند موجب ارتقای تفکر ریاضی شود.

اگر در یک قضیه، جای فرض و حکم را عوض کنیم به آنچه حاصل می‌شود «عکس قضیه» گفته می‌شود. عکس یک قضیه ممکن است درست یا نادرست باشد.

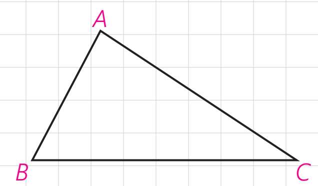
به‌طور مثال عکس قضیهٔ ۱ به‌صورت زیر است :

عکس قضیه ۱ : اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر.

فرض: $\hat{C} < \hat{B}$

حکم: $AB < AC$

عکس قضیه ۱ در صفحات بعد اثبات شده‌است.



مثال :

قضیه : اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند.

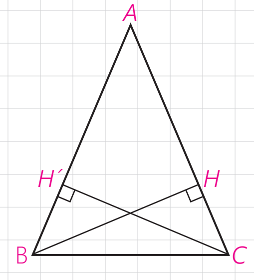
عکس قضیه : اگر در یک چهارضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند، آنگاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

مثال :

قضیه : اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.

فرض: $AB = AC$

حکم: $BH = CH'$



عکس قضیه : اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع‌ها نیز با هم برابرند.

فرض: $BH = CH'$

حکم: $AB = AC$

درواقع معمولاً برای نوشتن عکس قضیه، قسمت اصلی فرض، که حکم از آن ناشی می‌شود با حکم جابه‌جا می‌شود؛ مثلاً در مثال قبل مثلث‌بودن ABC و ارتفاع‌بودن BH و CH' در خود قضیه و عکس آن جزء مفروضات است.

گزاره یک جملهٔ خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد، اگرچه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد. گزاره می‌تواند تنها یک خبر را اعلام کند که به آن گزارهٔ ساده می‌گویند و می‌تواند بیش از یک خبر را اعلام کند و ترکیبی از چند گزارهٔ ساده باشد که به آن گزاره مرکب می‌گویند؛ مثلاً گزاره‌های «فردا هوا بارانی است» و «پانزده عددی اول است»، هرکدام یک گزارهٔ ساده است و «فردا هوا بارانی و پانزده یک عدد اول است» یک گزارهٔ مرکب است.

مثال :

الف) جمله‌های زیر گزاره‌اند :

ــ مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

ــ ۲<۳

ب) جمله‌های زیر گزاره نیستند :

ــ آیا فردا هوا بارانی است؟

ــ چه هوای خوبی!

ــ کتابت را مطالعه کن.

نقیض یک گزاره : همان‌طورکه گفته شد، ارزش یک گزاره یا درست است و یا نادرست. نقیض یک گزاره مانند مثال‌های زیر ساخته می‌شود و ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره است.

مثال :

الف) گزاره : «a از b بزرگ‌تر است.»

نقیض آن : «چنین نیست که a از b بزرگ‌تر باشد.» که معادل است با «a از b بزرگ‌تر نیست.» و معادل است با «a از b کوچک‌تر و یا با b برابر است.»

ب) گزاره : «مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.»

نقیض آن : «چنین نیست که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.» که معادل است با «مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن 180° نیست.»

پ) گزاره : «یک چهارضلعی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی‌اش 360° نیست.»

نقیض : «چنین نیست که یک چهارضلعی وجود داشته باشد که مجموع زوایای داخلی‌اش 360° نیست.» که معادل است با «هر چهارضلعی مجموع زوایای داخلی‌اش 360° است.»

در برخی گزاره‌ها به‌جای اینکه دربارهٔ چیزی خبری قطعی داده شود، خبری که اعلام می‌شود با یک شرط بیان می‌شود؛ مثلاً «اگر باران ببارد، مسابقه برگزار نخواهد شد.» به چنین گزاره‌هایی، **گزاره‌های شرطی** می‌گویند.

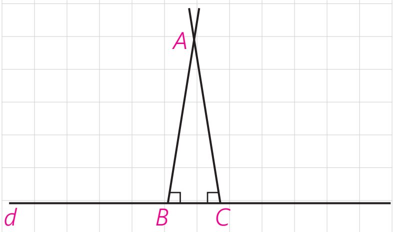
نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی کاربرد دارد، **برهان غیرمستقیم** یا **برهان خلف** است. بدین‌صورت که به‌جای اینکه به‌طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم غلط باشد (یا به عبارتی فرض می‌کنیم، نقیض حکم درست باشد) و به یک تناقض یا به یک گزاره غلط یا غیرممکن می‌رسیم. در این حالت نتیجه می‌گیریم که فرض غلط بودن حکم نادرست بوده و حکم نمی‌تواند غلط باشد.

مثال : از یک نقطه غیر واقع بر خط نمی‌توان بیش از یک عمود بر آن خط رسم کرد.

فرض : نقطه‌ای مانند A غیر واقع بر خطی مانند d وجود دارد.

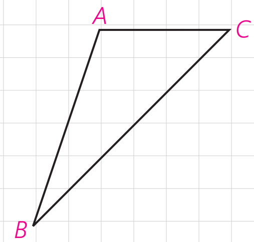
حکم : از نقطهٔ A نمی‌توان بیش از یک عمود بر خط d رسم کرد.

استدلال : با برهان غیرمستقیم فرض می کنیم حکم غلط باشد؛ یعنی فرض می کنیم از نقطهٔ A دو عمود بر خط d رسم کرده‌ایم که مانند شکل، خط d را در نقاط B و C قطع کرده‌اند. در این صورت مجموع زوایای داخلی مثلث ABC بزرگ‌تر از ۱۸۰° خواهد شد و این غیرممکن است. پس امکان رسم دو عمود از یک نقطهٔ غیر واقع بر یک خط وجود ندارد؛ یعنی حکم نمی‌تواند غلط باشد.



حال می‌خواهیم درستی عکس قضیهٔ ۱ را با برهان غیرمستقیم ثابت کنیم.

عکس قضیهٔ ۱ : اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع مقابل به زاویهٔ بزرگ‌تر، **بزرگ‌تر است** از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر.



برای واضح شدن مسئله و کمک به حل آن، شکل مثلث را رسم می‌کنیم و با استفاده از آن فرض و حکم را می‌نویسیم.

فرض : $\hat{A} > \hat{B}$

حکم : $BC > AC$

اثبات : با برهان غیرمستقیم فرض می کنیم حکم .... باشد. بنابراین باید .... یا ....

هر دو حالت را جداگانه بررسی می کنیم و نشان می‌دهیم هر دو حالت به تناقض منجر می‌شود.

حالت اول : اگر $BC < AC$ باشد، طبق قضیهٔ ۱ باید .... که با فرض در تناقض است.

حالت دوم : اگر $BC = AC$ باشد، $\overset{\Delta}{ABC}$ یک مثلث .... خواهد بود و می‌دانیم در این حالت باید $\hat{A} = \hat{B}$ باشد که در تناقض با فرض است. لذا هر دو حالت $BC < AC$ و $BC = AC$ غیرممکن‌اند؛ بنابراین $BC > AC$ است و حکم درست است.

قضیه‌های دو شرطی

همان‌گونه که دیدیم، قضیهٔ ۱ و عکس آن هر دو درست است؛ بنابراین می‌توانیم بگوییم که :

> اگر در مثلثی، دو ضلع نابرابر باشند، زاویهٔ مقابل به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویهٔ مقابل به ضلع کوچک‌تر، و برعکس.

چنین قضیه‌هایی را «قضیه‌های دوشرطی» می‌نامیم.

قضیه‌های دو شرطی را می‌توان با نماد $\Leftrightarrow$ (اگر و تنها اگر) بیان کرد؛ به‌طور مثال قضیهٔ فوق و عکس آن را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد :

فرض کنیم $\overset{\Delta}{ABC}$ یک مثلث باشد



$$BC > AB \quad \Leftrightarrow \quad \hat{A} > \hat{C}$$

مثال : در یک مثلث، دو ضلع با هم برابرند؛ اگر و تنها اگر ارتفاع‌های نظیر آنها با هم برابر باشند.

مثال نقض

نوع دیگری از استدلال که با آن آشنا شده‌اید، استدلال با مثال نقض است. گاهی در برخی موضوعات (چه ریاضی و چه غیرریاضی) یک حکم به‌صورت کلی بیان می‌شود؛ بدین‌صورت که در مورد تمام اعضای یک مجموعه یک حکم بیان می‌شود. موارد زیر نمونه‌هایی از حکم‌های کلی است :

الف) «همهٔ اعداد صحیح، مثبت‌اند.» (حکمی کلی در مورد تمام اعداد صحیح)

ب) «هر چهار ضلعی که چهار ضلع برابر داشته باشد، مربع است.» (حکم کلی در مورد تمام چهارضلعی‌هایی که چهار ضلع برابر دارند)

پ) «مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب ۳۶۰° است.» (حکم کلی در مورد تمام چهارضلعی‌های محدب)

ت) «به‌ازای هر عدد طبیعی n، مقدار عبارت $n^2 + n + ۴۱$ عددی اول است.» (حکم کلی در مورد تمام اعداد طبیعی)

حدس خود را دربارهٔ درستی یا نادرستی حکم کلی «الف» بنویسید. چگونه می‌توانید درستی حدس خود را ثابت کنید؟

می‌دانیم که (۲−) یک عدد صحیح و منفی است؛ بنابراین حکم کلی «الف» با ارائهٔ

همین مثال رد می‌شود. به چنین مثالی که نشان می‌دهد یک حکم کلی نادرست است، مثال نقض گفته می‌شود. دربارهٔ درستی یا نادرستی «ب» چه می‌توانید بگویید؟

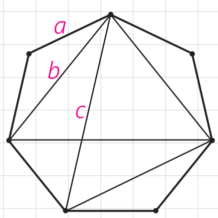
اگر برای یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض بیاوریم، دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم چه می‌توان گفت؟ آیا در موارد (پ) و (ت) می‌توانید مثال نقض پیدا کنید؟

آیا اگر در مورد یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض پیدا کنیم، باید درستیِ آن حکم کلی را نتیجه‌گیری کنیم؟ در مورد (پ) مثال نقض وجود ندارد؛ اما این برای پذیرش حکم کلی (پ) کافی نیست و باید توجه کرد که «برای نشان دادن درستی یک حکم کلی باید اثبات ارائه کنیم.» دربارهٔ گزینهٔ (ت) چه می‌توان گفت؟

اگر درستی یا نادرستی یک حکم کلی را نتوانیم اثبات کنیم و برای رد آن مثال نقض نیز نتوانیم بیابیم، نمی‌توان دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم کلی نتیجه‌ای گرفت.

کار در کلاس

۱ــ در شکل مقابل نقطه‌ها، رأس‌های یک هفت‌ضلعی منتظم به طول ضلع a می‌باشند. فاصلهٔ هر رأس از رأس بعدی برابر a و از دومین رأس بعد از آن برابر b و از سومین رأس بعد از آن برابر c است. آیا حکم کلی زیر درست است؟ «با وصل کردن هر سه رأس از این شکل یک مثلث متساوی‌الساقین، به‌دست می‌آید».



۲ــ آیا حکم‌های کلی زیر درست است؟ چرا؟

الف) برای هر دو مجموعهٔ A و B، یا $B \subseteq A$ و یا $A \subseteq B$

ب) هر دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، هم‌نهشت‌اند.

تمرین

۱ــ می‌دانیم که از یک نقطهٔ خارج از یک خط فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.

۲ــ با برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC، $AB \neq AC$ آنگاه $\hat{B} \neq \hat{C}$.

۳ــ گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

الف) در هر مثلث، اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویه، از چهار برابر اندازهٔ کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.

ب) در هر مثلث، هر ارتفاع از هرکدام از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.

۴ــ نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) هر لوزی یک مربع است.

ب) مستطیلی وجود دارد که مربع نیست.

پ) مثلثی با دو زاویهٔ قائمه وجود ندارد.

ت) همهٔ فلزات جامدند.

۵ــ عکس هر یک از قضایای زیر را بنویسید و سپس آنها را به صورت یک قضیه دوشرطی بنویسید.

الف) در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه روبه‌رو به آنها نیز برابرند.

ب) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، قطرهایش عمودمنصف یکدیگرند.

پ) در هر مثلث، اگر سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز با هم برابرند.

ت) اگر دو دایره شعاع‌های برابر داشته باشند، آنگاه مساحت‌های برابر نیز دارند.

۶ــ فرض کنیم ABC مثلثی دلخواه و AD نیمساز زاویهٔ A باشد. دلایل هر یک از نتایج زیر رابنویسید و نتیجهٔ نهایی که در پایان آمده است را کامل نمایید.

الف) $\hat{D}_۲ > \hat{A}_۱$ ، زیرا ____________ .

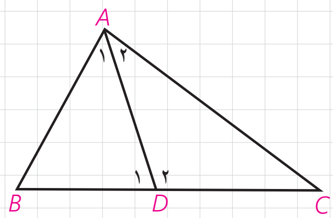
ب) $\hat{D}_۲ > \hat{A}_۲$ ، زیرا ____________ .

پ) $AC > DC$، زیرا ____________ .

ت) با روندی مشابه سه قسمت قبل نشان دهید : $AB > BD$

ث) حال نشان دهید : $AB+AC > BC$

نتیجه : در هر مثلث، مجموع اندازه‌های هر دو ضلع ازاندازهٔ ________ ، ________ است.



فصل دوم

۲

قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن



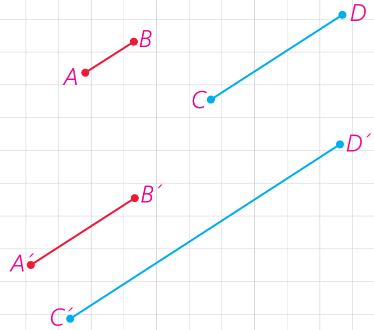
قضیه تالس و تشابه شکل‌های هندسی، کاربردهای زیادی در محاسبه طول‌ها و فاصله‌های غیر قابل دسترس دارد.
محاسبه ارتفاع بلندی‌ها به کمک سایه آنها نمونه‌ای از این کاربردهاست.

درس اول

نسبت و تناسب در هندسه

با نسبت و تناسب آشنایی دارید و ویژگی اصلی آن، یعنی برابری حاصل‌ضرب طرفین و وسطین را می‌شناسید؛ یعنی می‌دانید که اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $(b,d\neq ۰)$ آنگاه $ad=bc$ و برعکس؛ از تساوی $xy=zt$ با شرط $t,y\neq ۰$ تناسب $\frac{x}{t}=\frac{z}{y}$ نتیجه می‌شود. نسبت اندازه‌های دو پاره‌خط در هندسه هم به همین صورت تعریف می‌شود به شرطی که هر دو با یک واحد اندازه‌گیری بیان شده باشند؛ مثلاً اگر AB پاره‌خطی به طول ۲cm و CD پاره‌خطی به طول ۵cm باشد، $\frac{AB}{CD}=\frac{۲}{۵}$. حال فرض کنید $A'B'=۴cm$ و $C'D'=۱۰cm$، در این صورت:

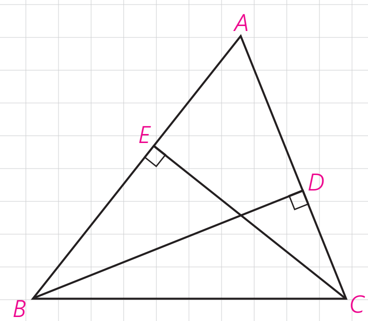
$$\frac{A'B'}{C'D'}=\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$$



و بنابراین یک تناسب به‌صورت $\frac{A'B'}{C'D'}=\frac{AB}{CD}$ درست می‌شود. بدیهی است که اگر نسبت AB به CD، $\frac{۲}{۵}$ باشد، نسبت CD به AB، $\frac{۵}{۲}$ است.

فعالیت ۱

مثلث ABC و ارتفاع‌های BD و CE از آن را در نظر بگیرید. مساحت مثلث ABC را یک بار با درنظرگرفتن قاعدهٔ AC و ارتفاع BD و بار دیگر با در نظرگرفتن قاعدهٔ AB بنویسید.



مساحت ABC $=\frac{۱}{۲}AC\times$ ______

مساحت ABC $=\frac{۱}{۲}$ ______ $\times$ ______

ــ عبارت‌های سمت راست، هر دو مساوی یک چیزند.

بنابراین : ______ $\times$ ______ $=$ ______ $AC\times$ آیا می‌توانید از آنجا یک تناسب بنویسید؟

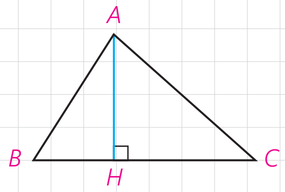
پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید. آیا همه به یک جواب رسیده‌اید؟
تفاوت پاسخ‌ها چه چیزی را نشان می‌دهد؟

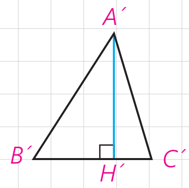
با توجه به فعالیت صفحهٔ قبل، جای خالی را با عبارت های مناسب پر کنید.

در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت ______ وارد بر آنها برابر است.

فعالیت ۲

در شکل مقابل ارتفاع‌های AH و A′H′ در دو مثلث ABC و A′B′C′ هم‌اندازه‌اند ($AH = A'H'$)





با پرکردن جاهای خالی و انجام عملیات ریاضی، نتیجهٔ زیر را به‌دست آورید.

$$S_{ABC} = \text{مساحت } ABC = \frac{۱}{۲} \cdots \times \cdots$$

$$S_{A'B'C'} = \frac{۱}{۲} \cdots \times \cdots$$

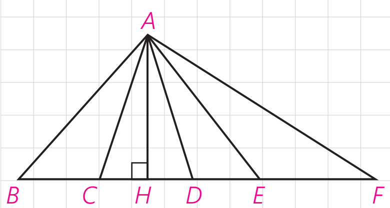
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{۱}{۲} \cdots \times \cdots}{\frac{۱}{۲} \cdots \times \cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$$

نتیجه ۱

هرگاه اندازهٔ ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازهٔ قاعده‌هایی است که این ارتفاع‌ها بر آنها وارد شده است.

کاردرکلاس

در شکل مقابل مثلث‌های ABC، ACD، ADE و AEF را که در رأس A مشترک‌اند، در نظر بگیرید. ارتفاع متناظر با رأس A، در همهٔ این مثلث‌ها کدام پاره‌خط است؟



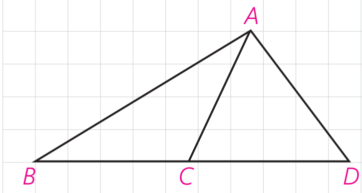
با توجه به نتیجهٔ فعالیت (۲) جاهای خالی را پر کنید :

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{\cdots}{\cdots} \qquad \frac{S_{ACD}}{S_{AEF}} = \frac{\cdots}{\cdots} \qquad \frac{S_{ACE}}{S_{ABF}} = \frac{\cdots}{\cdots}$$

نتیجه ۲

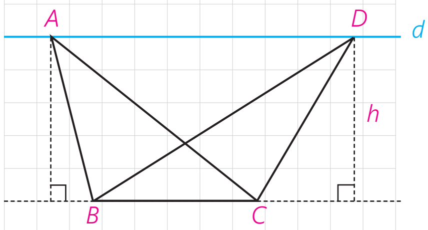
اگر دو مثلث در یک رأس مشترک بوده و قاعدهٔ مقابل به این رأس آنها روی یک خط راست باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازهٔ قاعده‌های آنهاست. مثلاً در شکل روبه‌رو:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}}=\frac{\text{مساحت } ABC}{\text{مساحت } ACD}=\frac{BC}{CD}$$



کاردرکلاس

در شکل روبه‌رو خط d با BC موازی است. چرا ارتفاع‌های وارد بر قاعدهٔ BC در مثلث‌های DBC و ABC با هم برابر است؟ اگر طول این ارتفاع‌ها را h بنامیم و طول BC را با a نمایش دهیم، مساحت این مثلث‌ها چقدر است؟



نتیجه ۳

اگر دو مثلث، قاعدهٔ مشترکی داشته باشند و رأس‌های روبه‌روی این قاعدهٔ آنها، روی یک خط، موازی این قاعده باشند، این مثلث‌ها هم‌مساحت‌اند. مثلاً در شکل بالا مثلث‌های ABC، DBC هم‌مساحت‌اند.

ویژگی‌های تناسب

به کمک اعمال و روش‌های جبری می‌توان از هر تناسب، تناسب‌ها یا تساوی‌های دیگری را نتیجه گرفت. مهم‌ترین این ویژگی‌ها به شرح زیر است (اثبات درستی این ویژگی‌ها را در مجلهٔ ریاضی انتهای فصل می‌توانید ببینید)

(طرفین وسطین کردن)	b و d ≠ ۰	$\frac{۳}{۵}=\frac{۶}{۱۰}\Leftrightarrow ۳\times۱۰=۵\times۶$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc$	۱
(معکوس کردن طرفین تناسب)	a و b و c و d ≠ ۰	$\frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۱۰}\Rightarrow\frac{۵}{۲}=\frac{۱۰}{۴}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$	۲
(تعویض جای طرفین یا وسطین)	a و b و c و d ≠ ۰	$\frac{۲}{۳}=\frac{۶}{۹}\Rightarrow\frac{۹}{۳}=\frac{۶}{۲}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ یا $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$	۳
(ترکیب نسبت در صورت یا مخرج)	b و d ≠ ۰	$\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}\Rightarrow\frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۱۰}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ یا $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$	۴
(تفضیل نسبت در صورت یا مخرج)	b و d ≠ ۰	$\frac{۳۰}{۲۱}=\frac{۲۰}{۱۴}\Rightarrow\frac{۹}{۲۱}=\frac{۶}{۱۴}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ یا $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$	۵
	b و d ≠ ۰	$\frac{۴}{۶}=\frac{۸}{۱۲}\Rightarrow\frac{۱۲}{۱۸}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۴}{۶}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$	۶

(تعمیم ویژگی ۶)	$b_۱$ و $b_۲$ و ... و $b_n \neq ۰$	$\frac{a_۱}{b_۱}=\frac{a_۲}{b_۲}=\cdots=\frac{a_n}{b_n} \Rightarrow \frac{a_۱}{b_۱}=\frac{a_۲}{b_۲}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_۱+a_۲+\cdots+a_n}{b_۱+b_۲+\cdots+b_n}$ $\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}=\frac{۶}{۹}=\frac{۸}{۱۲} \Rightarrow \frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}=\frac{۶}{۹}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲+۴+۶+۸}{۳+۶+۹+۱۲}=\frac{۲۰}{۳۰}$	۷

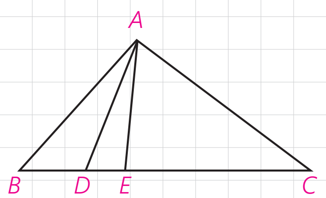
تعریف واسطهٔ (میانگین) هندسی: اگر طرفین یا وسطین یک تناسب شامل دو عدد برابر باشد؛ یعنی $\frac{b}{c}=\frac{a}{b}$ یا $\frac{c}{b}=\frac{b}{a}$ با طرفین وسطین‌کردن تناسب، نتیجه می‌شود: $b^۲=ac$. در این صورت b را واسطهٔ هندسی a و c می‌نامیم.
مثلاً اگر دو پاره‌خط به طول‌های ۴ و ۹ واحد داشته باشیم، پاره‌خطی که ۶ واحد طول دارد، واسطهٔ هندسی بین آنهاست (چرا؟)

تمرین

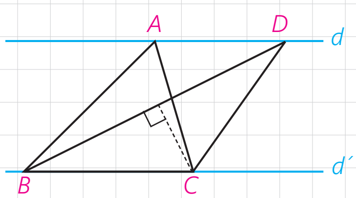
۱ــ اگر $\frac{۳}{۵}=\frac{z}{۶}=\frac{y}{۳}=\frac{x}{۲}$ حاصل $x+y+z$ را به‌دست آورید.

۲ــ طول پاره‌خطی را به‌دست آورید که واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط به طول‌های ۸ و ۱۰ سانتی‌متر است.

۳ــ در شکل مقابل مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت‌های $\frac{DE}{BD}$ و $\frac{BC}{DE}$ را به‌دست آورید.



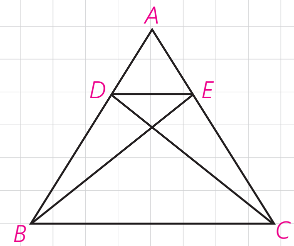
۴ــ در شکل مقابل $d \parallel d'$ و مساحت مثلث ABC، $۸cm^۲$ است. اگر $BD=۶cm$ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ C از BD را به‌دست آورید.



درس دوم

قضیهٔ تالس

در شکل مقابل خط DE موازی ضلع BC رسم شده است. مثلث‌های DAE و DEC در رأس D مشترک‌اند. قاعده‌های مقابل به این رأس کدام‌اند؟ با توجه به نتیجهٔ ۲ از درس اول، تناسب‌های زیر را کامل کنید :



$$\frac{S_{DAE}}{S_{DEC}}=\frac{\cdots}{\cdots}\ ,\ \frac{S_{ADE}}{S_{DBE}}=\frac{\cdots}{\cdots}$$

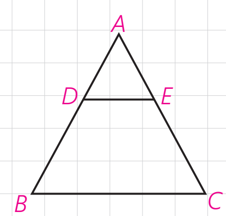
مثلث‌های DBE و DEC هم‌مساحت‌اند (چرا؟) با توجه به این موضوع از تساوی‌های بالا تناسب زیر را نتیجه‌گیری کنید :

$$\frac{AE}{\cdots}=\frac{\cdots}{DB}$$

بنابراین قضیه زیر را اثبات کردیم :

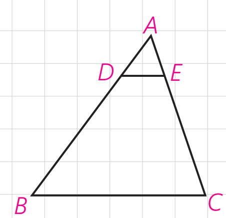
قضیهٔ تالس: هرگاه در یک مثلث، خطی موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث را در دو نقطه قطع کند، روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط جدا می‌کند که اندازه‌های آنها تشکیل یک تناسب را می‌دهند. به طور خلاصه هرگاه مانند شکل روبه‌رو داشته باشیم DE||BC، آنگاه:

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

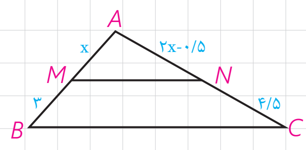


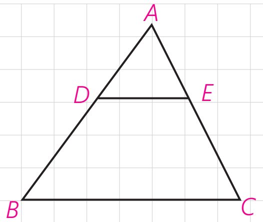
کار در کلاس

۱ــ در شکل مقابل DE||BC و AD=۱ و DB=۳ و AE=۰/۸. به کمک قضیهٔ تالس طول AC را به‌دست آورید.



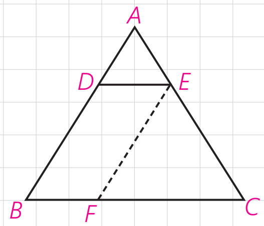
۲ــ در شکل مقابل MN||BC؛ به کمک قضیهٔ تالس و با تشکیل یک معادله، مقدار x را به‌دست آورید.





۳ــ در شکل مقابل DE||BC؛ تناسب قضیهٔ تالس را بنویسید و به کمک ترکیب نسبت در مخرج، رابطهٔ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ و با تفضیل نسبت در صورت از این تناسب، رابطهٔ $\frac{DB}{AB}=\frac{CE}{AC}$ را نتیجه بگیرید. این رابطه‌ها صورت‌های دیگر قضیه تالس هستند.

فعالیت ۱



در شکل مقابل DE||BC، از نقطهٔ E، پاره‌خط EF را موازی AB رسم کرده‌ایم.

چهارضلعی DEFB چه نوع چهارضلعی است؟ چرا؟

با توجه به این موضوع داریم :

DE = . . .   ,   DB = . . .

در مثلث ABC و با درنظرگرفتن DE||BC، قضیهٔ تالس را بنویسید.

$$\frac{AD}{\cdots}=\frac{\cdots}{AC} \quad (۱)$$

در مثلث CAB با توجه به EF||AB، قضیهٔ تالس را بنویسید.

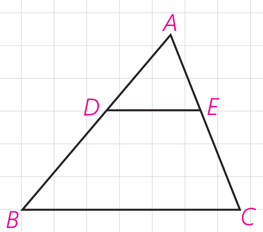
$$\frac{BF}{BC}=\frac{\cdots}{\cdots} \quad (۲)$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) و جای‌گذاری DE به جای BF خواهیم داشت :

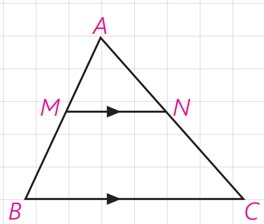
$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

تعمیم قضیهٔ تالس: اگر خطی دو ضلع مثلثی را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم آن موازی باشد، مثلثی پدید می‌آید که اندازهٔ ضلع‌های آن با اندازهٔ ضلع‌های مثلث اصلی متناسب‌اند؛ مثلاً در شکل روبه‌رو داریم:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$



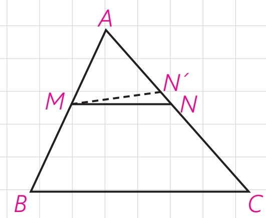
کار در کلاس



در شکل مقابل، با فرض MN||BC، طبق قضیهٔ تالس داریم : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ حال عکس قضیهٔ تالس را به زبان ریاضی بنویسید.

.... $\Rightarrow$ ....

عکس قضیهٔ تالس: اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آنها، چهار پاره‌خط با اندازه‌های متناظراً متناسب جدا کند، آن‌گاه با ضلع سوم مثلث موازی است.

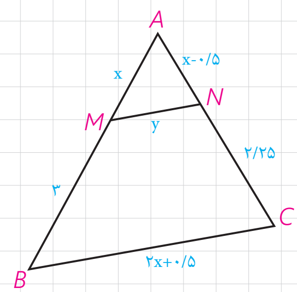


اثبات با برهان خلف است. در شکل می‌دانیم :

$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ ، فرض کنیم بر خلاف حکم $MN \nparallel BC$ ، پس از نقطهٔ M پاره‌خط MN' را موازی BC رسم می‌کنیم. حال با توجه به قضیهٔ تالس داریم :

$$MN' \parallel BC \Rightarrow \frac{AN'}{AC}=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$$

از مقایسهٔ این تناسب، با فرض مسئله نتیجه می‌شود $\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$ و درنتیجه : $AN'=AN$ و بنابراین N بر 'N منطبق است و MN همان 'MN است که موازی BC است.



مثال : در شکل مقابل MN||BC است، مقادیر x و y را به دست آورید.

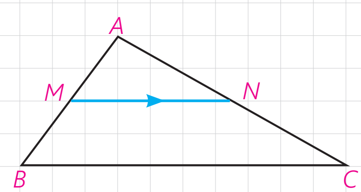
حل : با توجه به قضیه تالس و تعمیم آن داریم :

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{x}{۳}=\frac{x-۰/۵}{۲/۲۵} \Rightarrow$$

$$۲/۲۵x=۳x-۱/۵ \Rightarrow ۰/۷۵x=۱/۵ \Rightarrow x=۲$$

$$\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{y}{۴/۵} \Rightarrow y=۱/۸$$

تمرین



۱ــ در شکل مقابل پاره‌خط MN موازی با BC رسم شده است. درستی و نادرستی هر عبارت را مشخص کنید :

الف) $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=\frac{MN}{BC}$

ب) $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$

پ) $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$

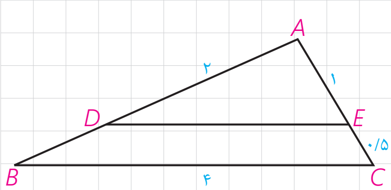
ت) $\frac{AM}{BM}=\frac{MN}{BC}$

ث) $\frac{MB}{AB}=\frac{NC}{CA}=\frac{MN}{BC}$

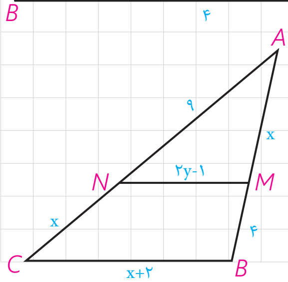
ج) $\frac{MB}{MA}=\frac{NC}{NA}$

چ) $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

ح) $\frac{MB}{AB}=\frac{MN}{BC}$

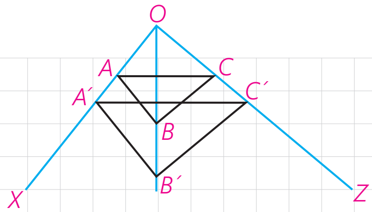


۲ــ در شکل مقابل DE||BC؛ باتوجه به اندازه پاره‌خط‌ها، طول‌های DE و AB را به‌دست آورید.

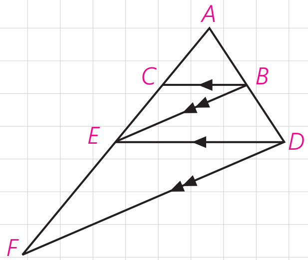


۳ــ در شکل مقابل MN||BC؛ مقادیر x و y را به‌دست آورید.

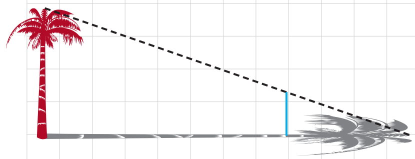
۴ــ در شکل مقابل می‌دانیم $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$ با استفاده از قضیهٔ تالس و عکس آن ثابت کنید : $AC \parallel A'C'$



۵ــ در شکل مقابل می‌دانیم $BC \parallel DE$ و $BE \parallel DF$، به کمک قضیهٔ تالس در مثلث‌های ADE و ADF و مقایسهٔ تناسب‌ها با یکدیگر، ثابت کنید : $AE^2 = AC.AF$ (به عبارت دیگر AE واسطه هندسی بین AC و AF است)



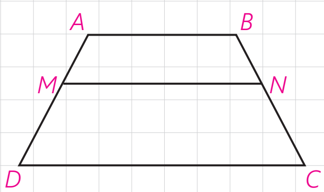
۶ــ یکی ازکاربردهای قضیهٔ تالس از زمان‌های دور تاکنون، محاسبهٔ فاصله‌های غیرقابل دسترس بوده است؛ به عنوان مثال برای تعیین یک ارتفاع بلند مانند ارتفاع یک درخت بلند در زمانی معین، طول سایهٔ درخت را روی زمین اندازه می‌گیریم؛ سپس یک قطعه چوب کوتاه را که به آن شاخص می‌گویند، طوری به صورت عمودی جابه‌جا می‌کنیم که سایهٔ آن روی امتداد سایهٔ درخت قرار گیرد و نوک سایهٔ شاخص نیز بر نوک سایهٔ درخت منطبق شود؛ به‌طور مثال اگر طول سایهٔ درخت ۶۰ متر، طول سایهٔ شاخص ۳ متر و طول شاخص ۱ متر باشد، بلندی درخت چند متر است؟

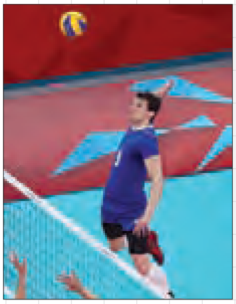


۷ــ در ذوزنقه مقابل $MN \parallel AB \parallel CD$ ، ثابت کنید :

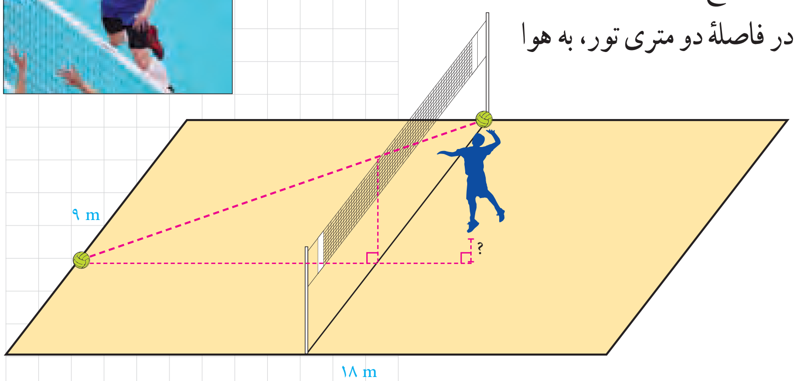
$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$ (قضیه تالس در ذوزنقه)

(راهنمایی: یکی از قطرها را رسم کنید.)





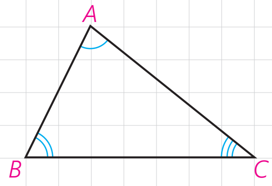
۸ــ ابعاد یک زمین استاندارد والیبال ۹ متر در ۱۸ متر است که توسط خط میانی به دو مربع ۹×۹ تفکیک می‌شود و تور والیبال مردان با ارتفاع ۲/۴۳ متر روی خط وسط نصب شده‌است. یک بازیکن با قد ۱۸۰ سانتی‌متر و در فاصلهٔ دو متری تور، به هوا می‌پرد و توپی را که در ارتفاع ۳۰ سانتی‌متری بالای سرش است با ضربه آبشار مماس بر تور وسط روانه زمین حریف می‌کند و توپ روی خط انتهای زمین حریف می‌نشیند. این بازیکن برای ضربه زدن چقدر به هوا پریده است؟

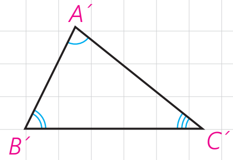


درس سوم

تشابه مثلث‌ها

در سال گذشته با مفهوم تشابه و چندضلعی‌های متشابه آشنا شدید. در اینجا می‌خواهیم دربارهٔ تشابه مثلث‌ها، بیشتر بدانیم. با توجه به تعریف تشابه چندضلعی‌ها، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند؛ اگر و فقط اگر زوایای آنها هم‌اندازه و اندازه‌های اضلاع آنها متناسب باشند :





$$\angle A = \angle A', \quad \angle B = \angle B', \quad \angle C = \angle C', \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \Leftrightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

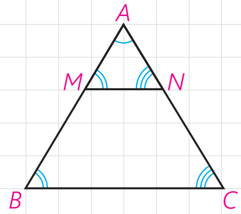
نسبت اندازه‌های اضلاع نظیر هم در دو مثلث را نسبت تشابه می‌گوییم. مثلاً اگر $\frac{A'B'}{AB} = \frac{۱}{۲}$ باشد و اندازهٔ اضلاع مثلث $A'B'C'$ نظیر به نظیر نصف اضلاع مثلث ABC باشند، گوییم مثلث $A'B'C'$ با مثلث ABC با نسبت تشابه $\frac{۱}{۲}$، متشابه است.

سؤال : مثلث ABC با چه نسبت تشابهی، با مثلث $A'B'C'$ متشابه است؟

قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها

اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی، دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها) را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آنها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است.

$$MN \parallel BC \Longrightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC$$



۱ــ زاویه‌های $\angle M$ و $\angle N$ به ترتیب با زاویه‌های $\angle B$ و $\angle C$ برابرند. چرا؟

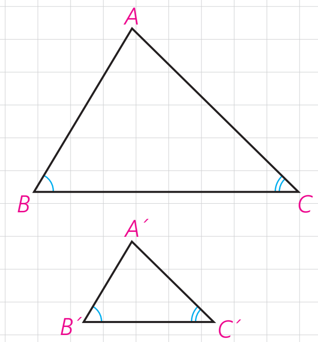
۲ــ با توجه به تعمیم قضیهٔ تالس تناسب زیر را کامل کنید :

$$\frac{AM}{\cdots} = \frac{\cdots}{AC} = \frac{MN}{\cdots}$$

۳ــ از (۱) و (۲) در مورد مثلث‌های AMN و ABC چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

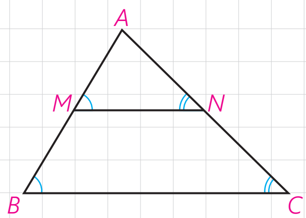
حال با توجه به قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها، می‌توانیم سه قضیهٔ اصلی را که حالت‌های مختلف تشابه مثلث‌ها را بیان می‌کند (مانند حالت‌های هم‌نهشتی مثلث‌ها) اثبات کنیم.

راهبرد کلی ما برای اثبات این سه قضیه، این است که روی اضلاع AB و AC از مثلث بزرگ‌تر، AM و AN را هم‌اندازه دو ضلع نظیر $A'B'$ و $A'C'$ جدا، و ثابت کنیم MN موازی BC است.



قضیه ۱: هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\left(\hat{B}=\hat{B}',\hat{C}=\hat{C}' \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'\right)$$



اثبات: روی ضلع‌های AB و AC پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب هم‌اندازه با $A'B'$ و $A'C'$ جدا می‌کنیم.

۱ــ $\angle A+\angle B+\angle C=\angle A'+\angle B'+\angle C'=۱۸۰°$ و $\angle B=\angle B'$

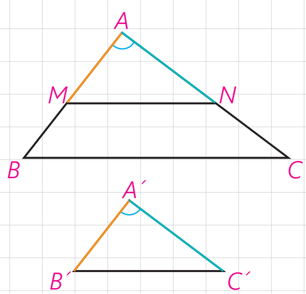
و $\angle C=\angle C'$ بنابراین $\angle A=\angle A'$

۲ــ $AM=A'B'$ و $AN=A'C'$ و $\angle A=\angle A' \overset{(ض‌زض)}{\Longrightarrow} \Delta AMN \cong \Delta A'B'C'$

$\Rightarrow MN=B'C'$ و $\angle M=\angle B'$ و $\angle N=\angle C'$

۳ــ $\angle M=\angle B'$ و $\angle B=\angle B' \Rightarrow \angle M=\angle B \Rightarrow MN \parallel BC$

۴ــ طبق قضیهٔ اساسی تشابه، $\Delta AMN \sim \Delta ABC$ و در نتیجه : $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$



قضیه ۲: هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویهٔ بین آنها، هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند:

$$\angle A=\angle A',\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

اثبات: روی ضلع‌های AB و AC، پاره‌خط‌های AM و AN را به‌ترتیب هم‌اندازهٔ $A'B'$ و $A'C'$ جدا می‌کنیم.

۱ــ مثلث‌های AMN و $A'B'C'$ به چه حالتی هم‌نهشت‌اند؟ اجزای برابر آنها را مشخص کنید.

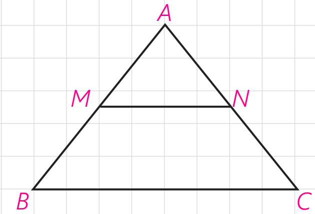
۲ــ در فرض مسئله به‌جای $A'B'$ و $A'C'$، پاره‌خط‌های هم اندازه با آنها را قرار دهید. حال بگویید چرا $MN \parallel BC$؟

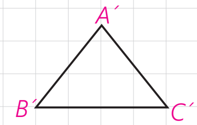
۳ــ با توجه به قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها و نتیجهٔ قسمت (۱) درستی حکم را ثابت کنید.

با استفاده از این سه قضیه (به خصوص قضیه ۱) می‌توانیم تشابه مثلث‌های متشابه را اثبات کنیم و از آن طریق مسئله‌های زیادی را حل کنیم.

قضیهٔ ۳: هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}\Rightarrow \Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$$





اثبات : روی AB و AC، پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب هم‌اندازه $A'B'$ و $A'C'$ جدا کنید.

۱ــ در فرض به جای $A'B'$ و $A'C'$ مساوی‌های آنها را جایگزین کنید و سپس بگویید چرا $MN\parallel BC$؟

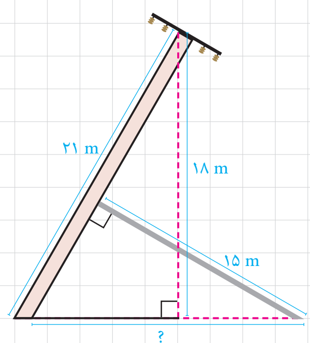
۲ــ از قضیهٔ اساسی تشابه، چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

۳ــ تعمیم قضیهٔ تالس را در مثلث ABC بنویسید. از مقایسهٔ این تناسب‌ها با تناسب‌های فرض، نتیجه بگیرید :

$MN=B'C'$

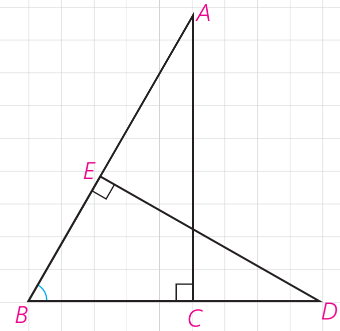
۴ــ مثلث‌های $A'B'C'$ و AMN به چه حالتی هم‌نهشت‌اند؟ از اینجا درستی حکم را ثابت کنید.

مثال : مطابق شکل روبه‌رو، یک تیر (دکل) انتقال برق به ارتفاع ۲۱ متر در اثر وزش باد خم شده است و در موقعیت جدید، نوک آن از زمین ۱۸ متر فاصله دارد. می‌خواهیم با قرار دادن یک تیر فلزی به طول ۱۵ متر، عمود بر آن، آن را به‌طور موقت سرپا نگه داریم. پای این تیر فلزی را باید در چه فاصله‌ای از پای تیر انتقال برق محکم کنیم؟



حل : اگر تیر برق را با یک پاره‌خط و تیر فلزی نگه‌دارنده را نیز با پاره‌خطی دیگر مشخص کنیم، شکل روبه‌رو را دوباره رسم می‌کنیم.

حال در دو مثلث ABC و BDE داریم :



$\angle B=\angle B\ ,\ \angle C=\angle E=۹۰^\circ \Rightarrow$

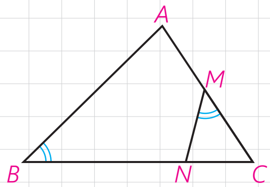
$\Delta ABC\sim\Delta BDE\Rightarrow$

(در نوشتن نسبت تشابه، توجّه کنید که اضلاع روبه‌رو به زوایای مساوی در دو مثلث را در یک نسبت بر هم تقسیم کنید.)

$$\frac{DE}{AC}=\frac{BD}{AB}=\frac{BE}{BC}\Rightarrow\frac{۱۵}{۱۸}=\frac{BD}{۲۱}\Rightarrow BD=\frac{۲۱\times۱۵}{۱۸}=۱۷/۵m$$

یعنی باید پای تیر فلزی را در فاصلهٔ ۱۷/۵ متری از پای دکل برق محکم کرد.

مثال : در مثلث ABC، از نقطهٔ M وسط AC، زاویهٔ NMC را مساوی زاویهٔ B جدا کرده‌ایم. اگر NC=۲ و NB=۴، طول AC را به دست آورید.



حل : با کمی دقت مشاهده می‌کنید که مثلث‌های MNC و ABC دو زاویهٔ هم‌اندازه دارند و در نتیجه متشابه‌اند.

$$\angle M=\angle B \;,\; \angle C=\angle C \Rightarrow \Delta MNC \sim \Delta ABC$$

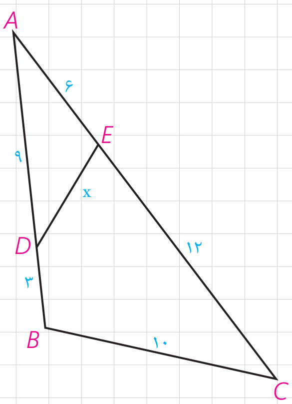
از آنجا با نوشتن نسبت تشابه داریم :

$$\frac{MC}{BC}=\frac{MN}{AB}=\frac{NC}{AC}$$

و به جای MC ، $\frac{AC}{۲}$ را قرار می‌دهیم :

$$\frac{AC}{۲BC}=\frac{NC}{AC} \Rightarrow AC^{۲}=۲NC.BC=۲NC(NC+NB) \Rightarrow AC^{۲}=$$
$$۲\times ۲(۲+۴)=۲۴ \Rightarrow AC=۲\sqrt{۶}$$

مثال : در شکل مقابل اندازهٔ هر پاره‌خط روی آن نوشته شده است. اندازهٔ x را به‌دست آورید.



حل : به کمک عددهای داده شده، بدیهی است که :

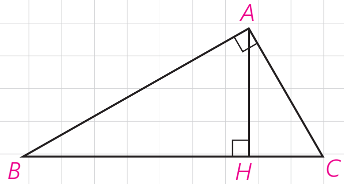
$\frac{۱}{۲}=\frac{۶}{۱۲}=\frac{AE}{AB}$ و $\frac{AD}{AC}=$ ____ بنابراین : ____ = ____ و با توجّه به زاویهٔ مشترک A مثلث‌های ____ و ____ متشابه‌اند. نسبت تشابه را بنویسید و x را به‌دست آورید.

سؤال : در شکل، روی AC، AD' را هم‌اندازه AD و روی AB، AE' را هم‌اندازهٔ AE جدا کنید. چرا $D'E' \parallel BC$؟

اثبات قضیهٔ فیثاغورس و روابط طولی دیگر در مثلث قائم‌الزاویه

فعالیت ۱

۱ــ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=۹۰^{\circ}$) ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. آیا می‌توانید دو زاویهٔ هم‌اندازه را در دو مثلث ABH و ABC نام ببرید؟ ...=$\hat{B}$ و $\hat{H}=...=۹۰^{\circ}$



به همین ترتیب دو زاویهٔ هم‌اندازه از دو مثلث ACH و ABC را نام ببرید. بنابراین می‌توانیم بگوییم :

$$\Delta ABH \sim \Delta ABC \;\;,\;\; \Delta ACH \sim \Delta ABC$$

چرا مثلث‌های ABH و ACH، خودشان با هم متشابه‌اند؟

نتیجه

در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو مثلث قائم‌الزاویه تفکیک می‌کند که هر دو با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.

۲ــ نسبت تشابه دو مثلث ABH و ABC را بنویسید :

$$\frac{AH}{\cdots}=\frac{AB}{\cdots}=\frac{\cdots}{AB}\Rightarrow AB^{2}=\cdots\times\cdots$$

۳ــ نسبت تشابه دو مثلث ACH و ABC را بنویسید و از آنجا ثابت کنید AC واسطهٔ هندسی BC و CH است.

۴ــ نسبت تشابه دو مثلث ACH و ABH را بنویسید و از آنجا ثابت کنید AH واسطهٔ هندسی بین BH و CH است.

۵ــ از روابط ۲ و ۳ داریم :

(قضیهٔ فیثاغورس)

$$AB^{2}+AC^{2}=BC\times\ldots+BC\times\ldots=BC(\ldots+\ldots)=BC.BC=BC^{2}$$

نتیجه

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC روابط مهم زیر برقرارند. این رابطه‌ها را روابط طولی می‌نامیم؛ زیرا با اندازه‌های اضلاع سروکار دارند:

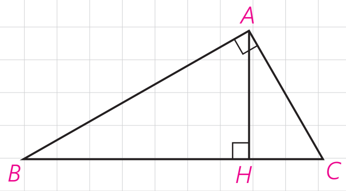
۱) $AB^{2}=BC.BH$

۲) $AC^{2}=BC.CH$

۳) $AB^{2}+AC^{2}=BC^{2}$

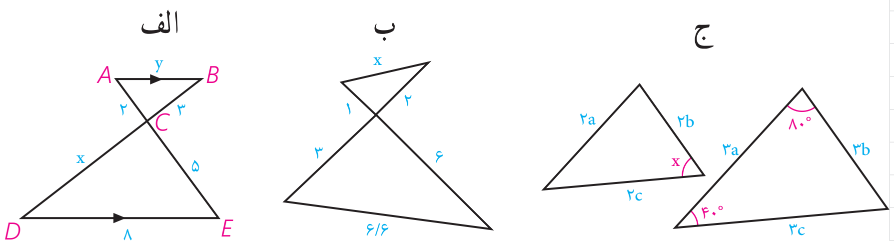
۴) $AH^{2}=BH.CH$

۵) $AH\times BC=AB\times AC$

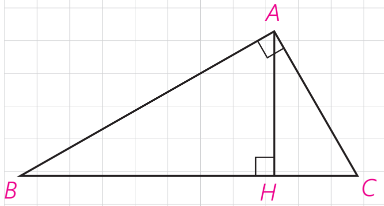


تمرین

۱ــ در هر یک از شکل‌های زیر، تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و از آنجا مقادیر x , y را مشخص کنید :



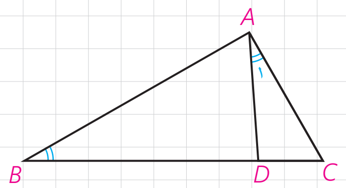
۲ــ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}$=۹۰°)، ارتفاع AH را رسم کرده‌ایم. به کمک روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه در هر یک از موارد زیر با توجه به مفروضات داده شده، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.

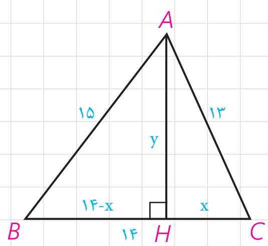


۱) BH=۹ , CH=۴ , AH=? , AB=? , AC=?

۲) AB=۸ , AC=۶ , BH=? , CH=?

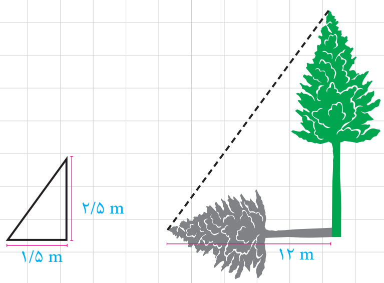
۳ــ در شکل روبه‌رو $\angle A_1=\angle B$ و AC=۴ و BD=۶، طول BC را به‌دست آورید.





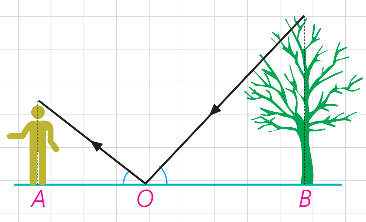
۴ــ در شکل مقابل، مثلثی با اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ رسم شده است. به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های ABH و ACH، مقادیر x و y را به دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را محاسبه کنید.

۵ــ در حیاط یک دبیرستان، دو درخت بلند وجود دارد. معلم هندسه از دانش‌آموزان خواست که برای تعیین ارتفاع این دو درخت روشی را ارائه کنند. در اینجا روش‌های دو دانش‌آموز را می‌بینید. با توجه به اطلاعات داده شده ارتفاع هر درخت را تعیین کنید.



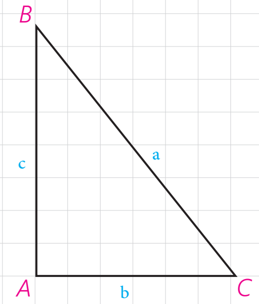
الف) روش ترانه : ترانه یک چوب ۲/۵ متری را به صورت عمودی روی زمین در جایی محکم کرد. طول سایهٔ چوب در آن زمان ۱/۵ متر بود. هم‌زمان طول سایهٔ درخت ۱۲ متر بود. با توجه به شکل ارتفاع این درخت چند متر است؟

ب) روش شهرزاد : شهرزاد آینه‌ای کوچک را که در مقیاس بزرگ می‌توان یک نقطه در نظر گرفت، (نقطهٔ O در شکل) روی زمین و در مسیر خط راستی که از پای درخت تا پای خودش کشیده است، قرار داد؛ سپس روی این خط آنقدر به جلو و عقب حرکت کرد تا بتواند، تصویر نوک درخت را در آینه ببیند. با توجّه به آنچه از خواص آینه‌ها و انعکاس نور می‌دانید، بگویید چگونه می‌توان با داشتن طول‌های AO و BO روی زمین و اندازهٔ قد شهرزاد (فاصله چشم او تا زمین)، ارتفاع درخت را به‌دست آورد. اگر قد شهرزاد ۱۶۰ سانتی‌متر و فاصلهٔ پای او از آینه ۲/۵متر و فاصلهٔ آینه از پای درخت ۲۰ متر باشد، ارتفاع درخت چند متر است؟



۶ــ با قضیه فیثاغورس آشنا شدید. این قضیه می‌گوید اگر زاویهٔ A از مثلثی مانند ABC، قائمه باشد، آنگاه $a^2 = b^2 + c^2$.

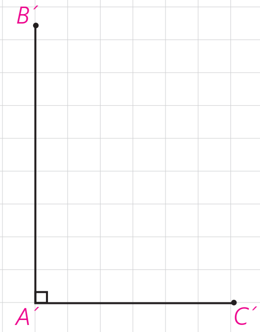
الف) عکس این قضیه را بنویسید.



ب) با انجام دادن مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیه فیثاغورس نیز درست است.

۱) فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطهٔ $a^2 = b^2 + c^2$ بین اندازهٔ طول‌های اضلاع آن برقرار است.

۲) پاره‌خط‌های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل به‌گونه‌ای درنظر بگیرید که $\hat{A}' = 90^\circ$ و $A'C' = AC$ و $A'B' = AB$



۳) با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$، اندازهٔ پاره‌خط $B'C'$ را به‌دست آورید و ثابت کنید $B'C' = BC$.

۴) توضیح دهید چرا $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$، و نتیجه بگیرید $\hat{A} = 90^\circ$.

ج) قضیه فیثاغورس و عکس آن‌را به‌صورت یک قضیهٔ دو شرطی بیان نمایید.

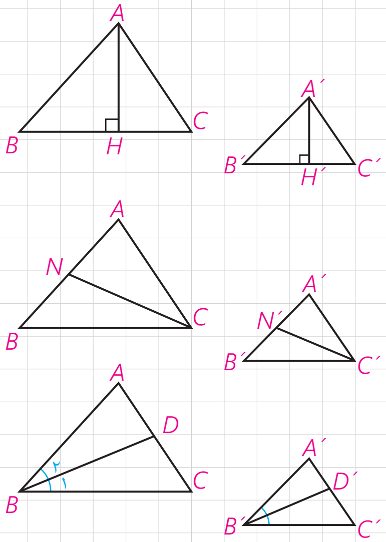
درس چهارم

کاربردهایی از قضیهٔ تالس و تشابه مثلث‌ها

نسبت اجزای فرعی، محیط‌ها و مساحت‌های دو مثلث متشابه

قضیه: هرگاه دو مثلث، متشابه باشند، آنگاه نسبت اندازه‌های هر دو جزءِ متناظر (ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازها و محیط‌ها) مساوی نسبت تشابه و نسبت مساحت‌های آنها مساوی توان دوم (مربع) نسبت تشابه است.

به عنوان مثال اگر مثلث‌های $A'B'C'$ و ABC متشابه باشند و نسبت تشابه آنها k باشد $(\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k)$ آنگاه :



الف) نسبت اندازه‌های ارتفاع‌های متناظر آنها k است :

$$\frac{A'H'}{AH}=k$$

ب) نسبت اندازه‌های میانه‌های متناظر آنها k است :

$$\frac{C'N'}{CN}=k$$

ج) نسبت اندازه‌های نیمسازهای متناظر آنها مساوی k است :

$$\frac{B'D'}{BD}=k$$

در مورد محیط‌های دو مثلث نیز داریم :

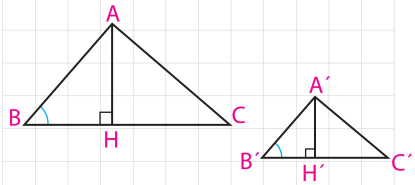
$$\frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}}=\frac{A'B'+A'C'+B'C'}{AB+AC+BC}=k$$

و در مورد مساحت‌ها داریم :

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=k^{۲}$$

اثبات : اگر درستی حکم را برای یکی از ارتفاع‌ها (میانه‌ها، نیمسازها) ثابت کنیم، درستی آن قابل تعمیم به سایر ارتفاع‌ها (میانه‌ها، نیمسازها) است. (چرا؟)

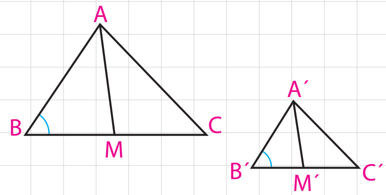
الف) ارتفاع‌ها



فرض	$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$
حکم	$\frac{A'H'}{AH}=k$

چرا $\angle B = \angle B'$ بنابراین : $\Delta ABH \sim \Delta A'B'H'$ (چرا؟) از آنجا درستی حکم را نتیجه‌گیری کنید.

ب) میانه‌ها



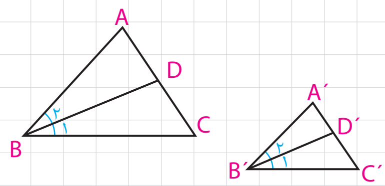
فرض	$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$
حکم	$\frac{A'M'}{AM}=k$

چرا $\angle B = \angle B'$ ؟

$$\frac{B'M'}{BM}=\frac{\frac{۱}{۲}\cdots}{\frac{۱}{۲}\cdots}=\frac{\cdots}{\cdots}=k \Rightarrow \frac{A'B'}{AB}=\frac{B'M'}{BM}$$

بنابراین $\Delta ABM \sim \Delta A'B'M'$ (چرا؟) از آنجا درستی حکم را نتیجه بگیرید.

ج) نیمسازها



فرض	$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$
حکم	$\frac{B'D'}{BD}=k$

چرا $\angle A = \angle A'$، چرا $\angle B_۲ = \angle B'_۲$؟

بنابراین $\Delta ABD \sim \Delta A'B'D'$ (چرا؟) از آنجا درستی حکم را نشان دهید.

د) محیط‌ها

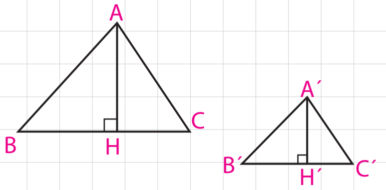
به سادگی و به کمک ویژگی تناسب‌ها می‌توان نوشت :

$$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k \Rightarrow$$

$$\frac{A'B'+A'C'+B'C'}{AB+AC+BC}=k \Rightarrow \frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}}=k$$

هـ) مساحت‌ها

دیدیم که نسبت ارتفاع‌های نظیر، مساوی نسبت تشابه است؛ بنابراین داریم :

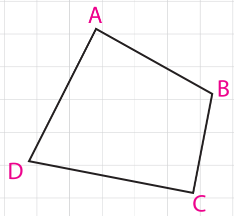


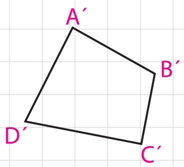
$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{۱}{۲}A'H'.B'C'}{\frac{۱}{۲}AH.BC}=\frac{A'H'}{AH}\times\frac{B'C'}{BC}=k.k=k^{۲}$$

$$\frac{A'H'}{AH}=\frac{B'C'}{BC}=k$$

کاردرکلاس

چهارضلعی‌های متشابه $A'B'C'D'$ و ABCD مفروض‌اند.





۱ــ اگر نسبت تشابه دو چهارضلعی، k باشد، ثابت کنید نسبت محیط‌های آنها مساوی k است.

۲ــ قطرهای AC و $A'C'$ را رسم کنید. نشان دهید :

$$\Delta ACD\sim\Delta A'C'D' \quad , \quad \Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$$

نسبت تشابه‌ها چیست؟

۳ــ جاهای خالی را پر کنید :

$$\frac{S_{A'C'D'}}{S_{ACD}}=\cdots \, , \, \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=\cdots\Rightarrow\frac{S_{A'C'D'}+S_{A'B'C'}}{S_{ACD}+S_{ABC}}=\cdots\Rightarrow\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}=\cdots$$

بنابراین نسبت مساحت‌های دو چهارضلعی، مساوی مربع نسبت تشابه آنهاست. به همین ترتیب می‌توانیم نسبت محیط‌ها و مساحت‌های هر دو n ضلعی متشابه را به صورت زیر ثابت کنیم :

> هرگاه دو چند ضلعی با نسبت تشابه k متشابه باشند، نسبت محیط های آنها، مساوی k و نسبت مساحت‌های آنها $k^{۲}$ است.

مثال : محیط یک مثلث متساوی‌الاضلاع سه برابر محیط مثلث متساوی‌الاضلاع دیگر است. مساحت مثلث بزرگ‌تر، چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟

حل : می‌دانیم مثلث‌های متساوی‌الاضلاع همواره با هم متشابه‌اند (چرا؟) بنابراین نسبت محیط‌های آنها، نسبت تشابه آنهاست، یعنی k=۳ بنابراین : $\frac{S}{S'}=k^{۲}=۹$ یعنی مساحت مثلث بزرگ‌تر، ۹ برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است.

> هر دو n ضلعی منتظم، همواره با هم متشابه‌اند.

کار در کلاس

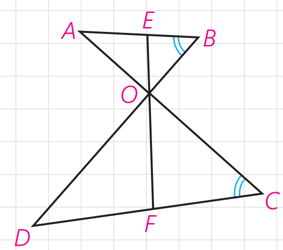
۱ــ اندازهٔ محیط‌های دو مثلث متشابه به ترتیب ۱۰ و ۱۸ واحد است. اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر ۱۵ واحد سطح باشد، مساحت مثلث کوچک‌تر، چند واحد سطح است؟

۲ــ نسبت مساحت‌های دو پنج ضلعی متشابه، $\frac{۴}{۹}$ است. اگر محیط یکی از آنها ۱۲ واحد باشد، محیط پنج‌ضلعی دیگر چند واحد است؟ (چند جواب داریم؟)

۳ــ اندازه‌های اضلاع یک هفت ضلعی را سه برابر می‌کنیم؛ بدون اینکه اندازه‌های زاویه‌ها را تغییر دهیم. مساحت هفت ضلعی چند برابر می‌شود؟

فعالیت

در شکل روبه‌رو EF=۱۰cm نیمساز دو زاویهٔ متقابل به رأس O است و $\angle B=\angle C$.



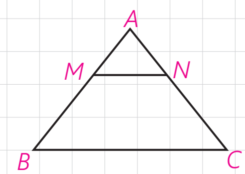
الف) چرا مثلث‌های OAB و OCD متشابه‌اند؟

ب) اگر $\frac{OB}{OC}=\frac{۲}{۳}$ ، نسبت $\frac{OE}{OF}$ چقدر است؟

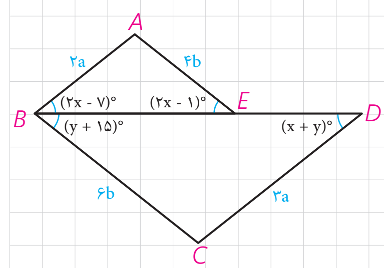
ج) طول‌های OE و OF را به‌دست آورید.

تمرین

۱ــ طول‌های اضلاع یک مثلث ۱۰ و ۱۲ و ۱۵ سانتی‌متر است و طول بلندترین ضلع مثلثی متشابه آن، ۱۰ سانتی‌متر است. محیط مثلث دوم را به‌دست آورید.

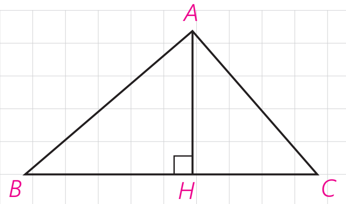


۲ــ در شکل روبه‌رو $MN \parallel BC$ است و مساحت ذوزنقهٔ MNCB هشت برابر مساحت مثلث AMN است. نسبت $\frac{MB}{MA}$ را به‌دست آورید.



۳ــ در شکل روبه‌رو می‌دانیم BE=۲DE است. اولاً x و y را به‌دست آورید. ثانیاً نسبت مساحت مثلث BCD به مساحت ABE را بیابید.

۴ــ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\angle A=90^\circ$) ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. می‌دانید که $\Delta ABH \sim \Delta ABC \sim \Delta ACH$ است. با توجّه به این موضوع،



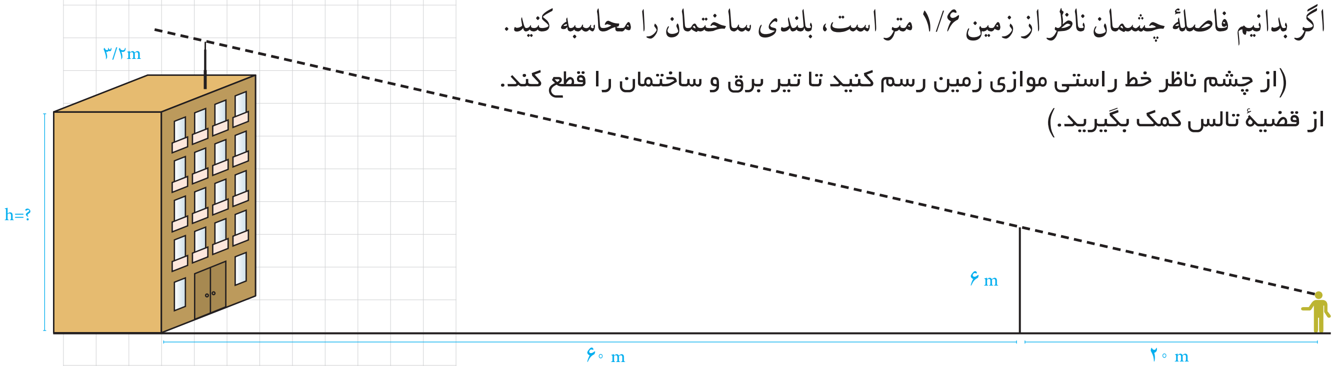
الف) ثابت کنید :

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 \quad , \quad \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

ب) با جمع کردن دو طرف تساوی‌های بالا و ادامهٔ کار، درستی قضیهٔ فیثاغورس را نتیجه‌گیری کنید.

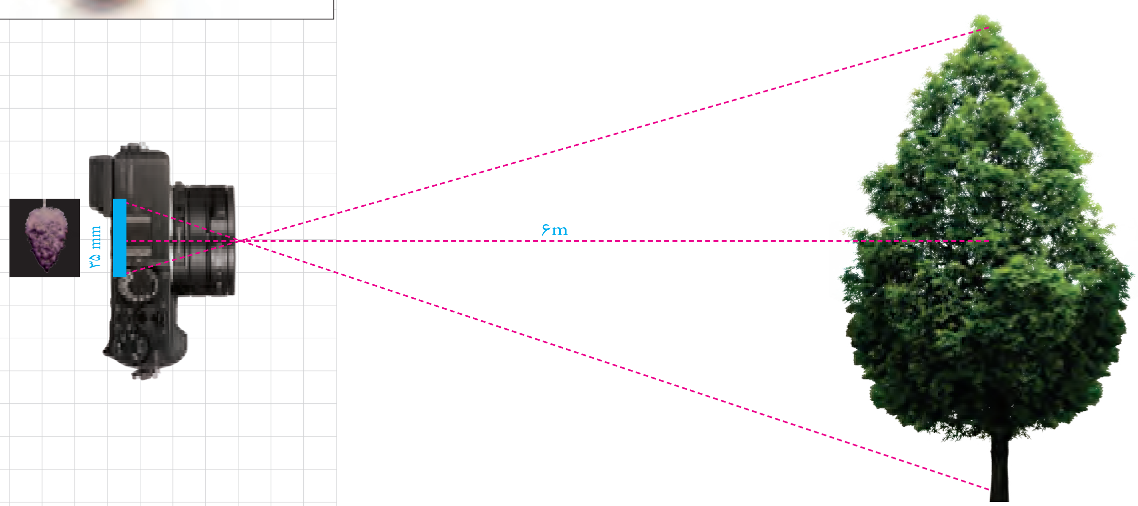
۵ــ مطابق شکل، روی یک ساختمان، یک آنتن به ارتفاع ۳/۲ متر نصب شده است. در فاصله ۶۰ متری ساختمان، یک تیر برق ۶ متری قائم وجود دارد و یک ناظر وقتی در فاصله ۲۰ متری تیر می‌ایستد، انتهای آنتن و انتهای تیر برق را در یک راستا می‌بیند. اگر بدانیم فاصلهٔ چشمان ناظر از زمین ۱/۶ متر است، بلندی ساختمان را محاسبه کنید.

(از چشم ناظر خط راستی موازی زمین رسم کنید تا تیر برق و ساختمان را قطع کند. از قضیهٔ تالس کمک بگیرید.)



۶ــ در دوربین‌های قدیمی، موقع عکس‌برداری، روی یک حلقهٔ فیلم تعداد محدودی (مثلاً سی و شش عدد) تصویر منفی[1] ثبت، و سپس این فیلم ظاهر می‌شود و عکس‌ها از روی آن چاپ می‌شوند. اگر فرض کنیم عرض یکی از این فیلم‌ها، ۳۵mm و فاصلهٔ آن درون دوربین تا عدسی[2]، ۴/۲cm و فاصله عدسی تا درختی که از آن عکس می‌گیرد، ۶m باشد، اندازهٔ واقعی درختی که از آن عکس گرفته می‌شود، چند متر است؟



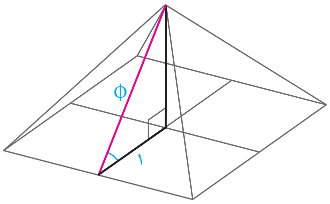


۱ــ واژهٔ «تصویر منفی» با تصویب فرهنگستان به‌جای واژهٔ «نگاتیو» به‌کار رفته است.

۲ــ واژهٔ «عدسی» با تصویب فرهنگستان به‌جای واژهٔ «لنز» به‌کار رفته است.

اعداد فیثاغورسی به سه عددی می‌گویند که مجموع مربع‌های دو تا از آنها برابر با مربع سومی باشد؛ به عبارتی اعداد b ، a و c را فیثاغورسی گویند، هرگاه $a^2 = b^2 + c^2$. اعداد فیثاغورسی اندازه‌های ضلع‌های یک مثلث قائم‌الزاویه (راست‌گوشه) را تشکیل می‌دهند. بررسی‌ها نشان داده است که در برخی نقاط جهان در ساخت بناها پیش از شناخت قضیه فیثاغورس از ویژگی اعداد فیثاغورسی استفاده می‌شده است.





اثبات ویژگی‌های تناسب

۱ طرفین ــ وسطین کردن؛ طرفین تساوی $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ را در عدد غیر صفر bd ضرب کنید :

$$\frac{a}{b}\times bd=\frac{c}{d}\times bd\Rightarrow ad=bc$$

۲ ویژگی‌های (۲) و (۳) با طرفین ــ وسطین کردن، به سادگی نتیجه می‌شوند :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc\Rightarrow da=cb\Rightarrow\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc\Rightarrow bc=ad\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

۳ ویژگی‌های ۵ و ۴ به صورت زیر با اضافه یا کم کردن عدد ۱ به دو طرف تناسب نتیجه می‌شوند :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}+۱=\frac{c}{d}+۱\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}\Rightarrow\frac{b}{a}+۱=\frac{d}{c}+۱\Rightarrow\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}\Rightarrow\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$$

ویژگی‌های تفضیل نسبت در صورت و مخرج را خودتان اثبات کنید.

۴ اثبات ویژگی ۶ :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k\Rightarrow a=bk\ ,\ c=dk\Rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{bk+dk}{b+d}=\frac{k(b+d)}{b+d}=k$$

$$\Rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

به همین ترتیب می‌توان تعمیم این ویژگی را هم اثبات کرد.

فصل سوم

۳

چند ضلعی ها



پل طبیعت / تهران

همه هنرمندان و معماران با هر سبک و در هر رشته به دنبال آن هستند که دیدگاه‌های خود را از زندگی و جهان اطراف درآنچه خلق می‌کنند و می‌سازند به نوعی به نمایش بگذارند. هندسه و به‌ویژه چندضلعی‌ها یکی از ابزارهای مهمی هستند که به کمک آنها می‌توان این آثار را پدید آورد.

درس اول

چندضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آنها

با پاره‌خط قبلاً آشنا شده‌اید. مطابق شکل زیر در پاره‌خط AB، نقطه‌های A و B را دو سر پاره‌خط یا نقاط انتهایی پاره‌خط می‌نامند.



به شکل‌های روبه‌رو توجه کنید. هر شکل از تعدادی پاره‌خط تشکیل شده است؛ اما نقاط مشترک پاره‌خط‌ها در همهٔ شکل‌ها با هم یکسان نیستند.

در شکل (۳) دو پاره‌خط AE و FC یکدیگر را در نقطه‌ای به‌جز نقاط انتهایی‌شان قطع کرده‌اند. در شکل (۴) پاره‌خط DE فقط در یک انتها بعضی پاره‌خط‌ها را قطع کرده و در انتهای دیگر هیچ پاره‌خطی را قطع نکرده است. اما در شکل‌های (۱) و (۲) هر پاره‌خط فقط دو پاره‌خط دیگر را آن هم در نقاط انتهایی قطع کرده است. چنین شکل‌های بسته‌ای را که از اجتماع پاره‌خط‌های متوالی هم تشکیل شده‌است، **چند ضلعی** می‌نامند.

در تمام این فصل شکل‌ها در صفحه درنظر گرفته می‌شوند.

تعریف: nضلعی شکلی است شامل n ($n \geq ۳$) پاره‌خط متوالی که:

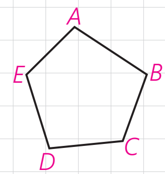
۱) هر پاره‌خط، دقیقاً دو پاره‌خط دیگر را در نقاط انتهایی خودش قطع کند.

۲) هر دو پاره‌خط که در یک انتها مشترک‌اند، روی یک خط نباشند.

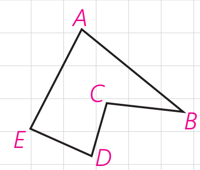
هر یک از این پاره‌خط‌ها یک ضلعِ چند ضلعی است.

هر دو ضلع چندضلعی را که در یک انتها مشترک‌اند، دو ضلع مجاور و نقطهٔ مشترک آن دو را رأس می‌نامند. هر دو زاویهٔ چندضلعی را که هر دو در یک ضلعِ چندضلعی مشترک‌اند، دو زاویهٔ مجاور به آن ضلع در چندضلعی می‌نامند. مانند $\angle A$ و $\angle B$ در شکل‌های (۱) و (۲)

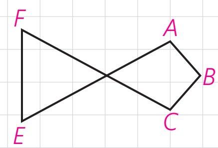
کدام یک از شکل‌های مقابل چند ضلعی است و تعداد ضلع‌ها و رأس‌های آن چند تاست؟ برخی ضلع‌های مجاور هم و غیر مجاور هم را مشخص کنید.



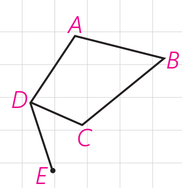
(۱)



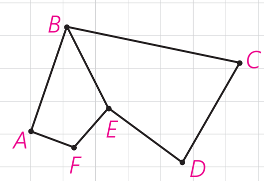
(۲)

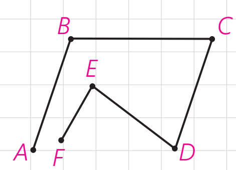


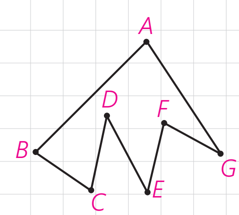
(۳)



(۴)

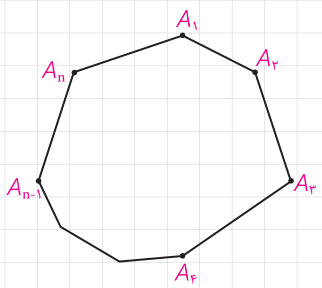






قطر در چندضلعی‌ها

در هر n ضلعی، هر پاره‌خط را که دو انتهای آن، دو رأس غیرمجاور باشند، قطر می‌نامند.



یک چهار ضلعی چند قطر دارد؟

n ضلعی $A_1A_2...A_n$ را درنظر می‌گیریم. از رأس A_1، ______ قطر می‌توان رسم کرد.
با توجه به اینکه n رأس داریم، آیا می‌توان گفت تعداد قطرها در n ضلعی $n(n-3)$ است؟

با این فرمول، مستطیل چند قطر دارد؟

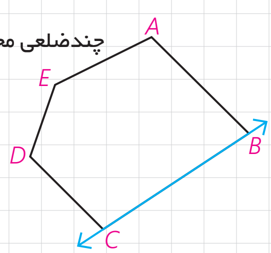
آیا جواب به‌دست آمده درست است؟

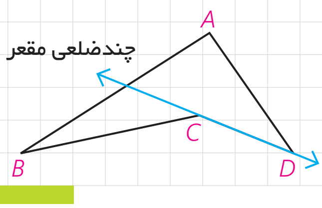
با چه تغییری در این فرمول به فرمول درست محاسبهٔ قطرها می‌رسیم؟ چرا این تغییر لازم است؟

در هر n ضلعی تعداد قطرها $\frac{n(n-3)}{......}$ است.

کار در کلاس

n نقطه که هیچ سه‌تای آنها روی یک خط واقع نیستند، مفروض‌اند. با توجه به استدلالی که در محاسبهٔ تعداد قطرهای nضلعی به‌کار برده‌اید، نشان دهید از هر نقطه به نقاط دیگر ______ پاره‌خط رسم می‌شود. بنابراین، این n نقطه را با ______ پاره‌خط می‌توان به هم متصل کرد. چه رابطه‌ای بین این تعداد پاره‌خط و مجموع تعداد قطرها و ضلع‌ها در n ضلعی وجود دارد؟

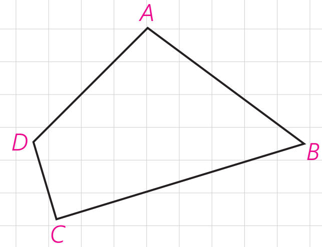




تعریف: n ضلعی را محدب گوییم؛ هرگاه با درنظر گرفتن خط شامل هر ضلع آن، بقیهٔ نقاط چندضلعی در یک طرف آن خط واقع شوند.

هر «چندضلعی» را که محدب نباشد، مقعر می‌نامند.

چهارضلعی‌های مهم و ویژگی‌هایی از آنها



در چهار ضلعی ABCD در شکل، دو ضلع AB و CD، همچنین دو ضلع AD و BC را ضلع‌های مقابل می‌نامند. در چهارضلعی هر دو ضلع غیرمجاور را دو ضلع مقابل می‌نامند.

ابتدا تعریف چهارضلعی‌های مهم را بیان می‌کنیم.

تعریف‌ها:

۱ــ متوازی‌الاضلاع چهارضلعی‌ای است که، هر دو ضلع مقابل آن موازی باشند.

۲ــ مستطیل چهارضلعی‌ای است که، همهٔ زاویه‌های آن قائمه باشند.

۳ــ لوزی چهارضلعی‌ای است که، هر چهار ضلع آن هم‌اندازه باشند.

۴ــ مربع چهارضلعی‌ای است که هر چهار ضلع آن هم‌اندازه و حداقل یک زاویهٔ آن قائمه باشد.

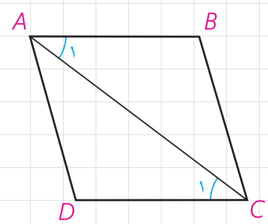
کار در کلاس

با توجه به تعریف‌های بالا درستی هریک از عبارت‌های زیر را توجیه کنید :

الف) مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.

ب) اگر در متوازی‌الاضلاع یک زاویه قائمه باشد، مستطیل است؛ چرا؟

پ) لوزی یک متوازی‌الاضلاع است.



در لوزی ABCD قطر AC را رسم می‌کنیم. دو مثلث ABC و ADC به حالت ______ هم‌نهشت‌اند. بنابراین دو زاویهٔ ______ و ______ هم‌اندازه‌اند.

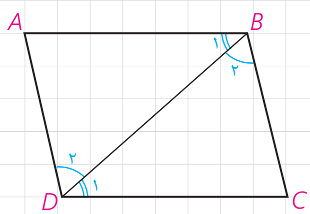
در نتیجه دو ضلع AB و CD موازی‌اند. به همین ترتیب دو ضلع مقابل BC و AD نیز موازی‌اند. یعنی لوزی متوازی‌الاضلاع است.

بنابراین، لوزی متوازی‌الاضلاعی است که دو ضلع مجاور آن هم‌اندازه باشند.

ت) مربع یک متوازی‌الاضلاع است.

ویژگی‌هایی از متوازی‌الاضلاع

فعالیت ۱



متوازی‌الاضلاع ABCD را درنظر بگیرید و قطر BD را رسم کنید. از موازی بودن ضلع‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

دو مثلث ABD و CDB به حالت ______ هم‌نهشت‌اند.

در نتیجه، ______ = AD و ______ = AB.

بنابراین قضیهٔ زیر ثابت شده است؛

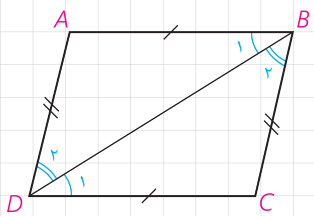
قضیهٔ ۱: در هر متوازی‌الاضلاع هر دو ضلع مقابل هم اندازه‌اند.

کاردرکلاس

در فعالیت (۱) مشاهده کردیم که وقتی در هر متوازی‌الاضلاع ABCD یک قطر مثلاً قطر BD را رسم می‌کنیم. دو مثلث هم‌نهشت ABD و CDB پدید می‌آیند. حال پرسش این است، اگر در یک چهارضلعی ABCD قطر BD را رسم کنیم و ΔABD و ΔCDB هم‌نهشت باشند، آیا چهارضلعی ABCD همواره متوازی‌الاضلاع است؟

اگر چنین است، آن را ثابت کنید و اگر نادرست است، مثال نقض بیاورید.

عکس قضیهٔ ۱: اگر در یک چهارضلعی، ضلع های مقابل دوبه‌دو هم‌اندازه باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.



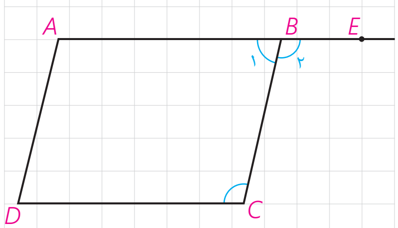
در چهارضلعی ABCD قطر BD را رسم می‌کنیم. به حالت ______ ، $\Delta ABD \cong \Delta CDB$. از هم‌نهشتی این دو مثلث نتیجه می‌گیریم، اندازهٔ $\angle B_1$ برابر اندازهٔ ______ است.

بنابراین ضلع AB موازی ضلع ______ است. از چه قضیه‌ای آن را نتیجه گرفته‌اید؟

موازی بودن دو ضلع دیگر یعنی ضلع‌های AD و BC را چگونه نتیجه می‌گیرید؟

بنابراین چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

فعالیت ۲



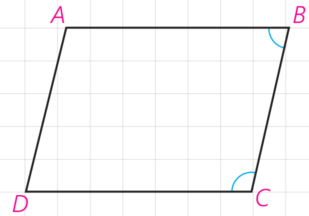
چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است.

با توجه به شکل، $\angle B_2 = \angle C$ است؛ چرا؟ $\angle B_1$ و $\angle B_2$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟ بنابراین $\angle B_1$ و $\angle C$ ______ می‌باشند.

بنابراین قضیهٔ زیر ثابت شده است؛

قضیهٔ ۲: در متوازی‌الاضلاع هر دو زاویهٔ مجاور مکمل‌اند.

عکس قضیهٔ ۲: هر چهارضلعی که هر دو زاویهٔ مجاور آن مکمل باشند، متوازی‌الاضلاع است.



در چهارضلعی ABCD، دو زاویهٔ $\angle B$ و $\angle C$ با هم مکمل‌اند. در این صورت ضلع AB موازی ضلع ______ است.

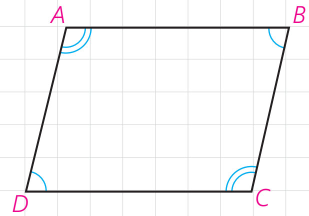
به همین ترتیب دو زاویهٔ $\angle B$ و $\angle A$ نیز مکمل‌اند. در نتیجه، ضلع AD موازی ضلع ______ است؛ بنابراین چهارضلعی ABCD ______ است.

قضیهٔ ۳: در هر متوازی‌الاضلاع، هر دو زاویهٔ مقابل هم‌اندازه‌اند.

با توجه به قضیهٔ قبل آن را ثابت کنید.

می‌توانید از فعالیت (۱) نیز استفاده کنید.

عکس قضیهٔ ۳: اگر در یک چهارضلعی هر دو زاویهٔ مقابل هم‌اندازه باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.



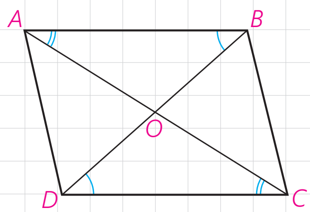
فرض کنیم در چهارضلعی ABCD هر دو زاویهٔ مقابل هم‌اندازه باشند. یعنی $\angle B$ و $\angle D$ و همچنین $\angle C$ و $\angle A$ هم‌اندازه‌اند. می‌دانیم مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی هر چهارضلعی محدب ۳۶۰° است. چگونه به کمک آن ثابت می‌کنید هر دو زاویهٔ مجاور مثلاً $\angle B$ و $\angle C$ مکمل‌اند؟

بنابراین به کمک عکس قضیهٔ ۲ ثابت کرده‌اید چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

فعالیت ۳

در متوازی‌الاضلاع ABCD، دو قطر AC و BD را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن دو را O می‌نامیم. $\Delta AOB \cong \Delta COD$. چرا؟

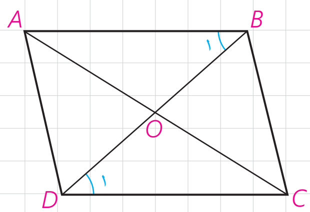
بنابراین، ______ = OB و ______ = OA. در نتیجه؛



قضیهٔ ۴: در هر متوازی‌الاضلاع قطرها ______ .

فعالیت ۴

فرض کنید در یک چهارضلعی دو قطر منصف یکدیگر باشند. چگونه نشان می‌دهید این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است؟



نقطه تقاطع دو قطر را O می‌نامیم. $\Delta AOB \cong \Delta OCD$. چرا؟

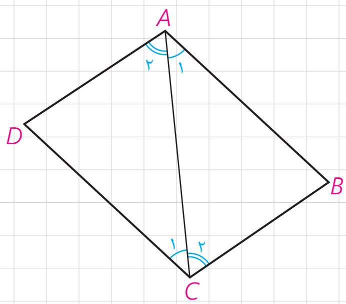
اندازهٔ $\angle B_1$ برابر اندازهٔ .... است. در نتیجه، ضلع AB موازی ضلع .... است. دو مثلث دیگر را درنظر بگیرید و به طور مشابه نشان دهید دو ضلع دیگر نیز موازی‌اند.

بنابراین؛

عکس قضیهٔ ۴: هر چهار ضلعی که قطرهای آن منصف یکدیگر باشند، متوازی‌الاضلاع است.

فعالیت ۵

فرض کنید در یک چهارضلعی دو ضلع مقابل موازی و هم‌اندازه باشند. مثلاً در چهارضلعی ABCD، ضلع‌های AB و CD هم‌اندازه و موازی‌اند. قطر AC را رسم می‌کنیم.



اندازهٔ $\angle A_1$ با اندازهٔ ______ برابر است.

بنابراین، بنابر حالت هم‌نهشتی ______ ، $\Delta ABC \cong \Delta CDA$.

در نتیجه اندازهٔ $\angle A_2$ برابر اندازهٔ زاویهٔ ______ است که از آن نتیجه می‌گیرید ضلع AD موازی ضلع ______ است. بنابراین، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

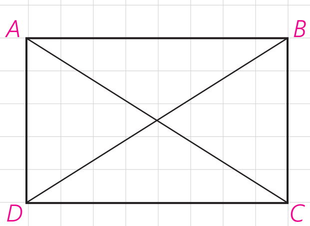
یعنی؛

هر چهارضلعی که دو ضلع مقابل آن هم‌اندازه و موازی باشند، متوازی‌الاضلاع است.

ویژگی‌هایی از مستطیل و لوزی

کدام ویژگی از مستطیل است که در هر متوازی‌الاضلاعی که مستطیل نباشد، برقرار نیست؟ در مورد مربع چطور؟

در مستطیل ABCD، دو قطر را رسم می‌کنیم. از هم‌نهشتی کدام دو مثلث می‌توان نتیجه گرفت AC=BD ؟ این هم‌نهشتی را نشان دهید.



بنابراین در هر مستطیل قطرها ______ .

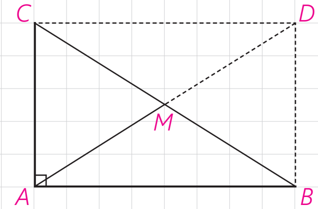
اگر دو قطر یک چهارضلعی هم‌اندازه باشند، آیا می‌توان نتیجه گرفت آن چهارضلعی مستطیل است؟

اگر این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، چطور؟ آن را با دلیل بیان کنید.

فعالیت ۶

ویژگی مهمی در مثلث قائم‌الزاویه

مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را که در آن $\angle A$ قائمه است و AM میانهٔ وارد بر وتر است درنظر می‌گیریم.



روی نیم‌خط AM نقطه D را چنان در نظر می‌گیریم که $AM = MD$.

چرا چهارضلعی ABDC متوازی‌الاضلاع است؟

چرا این چهارضلعی مستطیل است؟

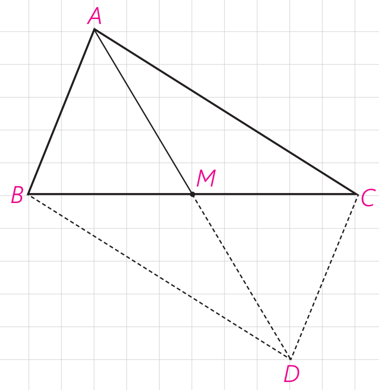
در مورد قطرها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

اندازهٔ AM چه رابطه‌ای با اندازهٔ BC دارد؟ آن را بیان کنید.

در هر مثلث قائم‌الزاویه اندازهٔ میانهٔ وارد بر وتر ـــــــ اندازهٔ وتر است.

می‌توانیم عکس این ویژگی را نیز ثابت کنیم.

اگر در مثلثی اندازهٔ میانهٔ وارد بر یک ضلع، نصف اندازهٔ آن ضلع باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.

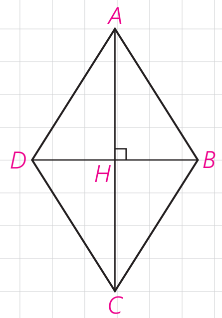


در مثلث ABC، AM میانه وارد بر ضلع BC است و $AM = \frac{BC}{۲}$. روی نیم‌خط AM نقطهٔ D را چنان در نظر می‌گیریم که $MD = AM$.

آیا می‌توانید نتیجه بگیرید $AD = BC$ و قطرهای AD و BC منصف یکدیگرند؟ چگونه نتیجه می‌گیرید $\angle A$ قائمه است؟

ویژگی‌هایی که فقط در لوزی برقرارند

آیا می‌توانید یک ویژگی از لوزی را بیان کنید که در هر متوازی‌الاضلاع یا هر مستطیل، که لوزی نیست، برقرار نباشد؟



قطرهای لوزی ABCD را رسم می‌کنیم. چون لوزی متوازی‌الاضلاع است، قطرها منصف یکدیگرند. ΔABD چه نوع مثلثی است؟

نقطهٔ تلاقی دو قطر را H می‌نامیم، در مثلث ABD ، AH چه پاره‌خطی است؟

چرا پاره‌خط AH بر قطر BD عمود است و روی نیمساز $\angle A$ است؟

بنابراین؛

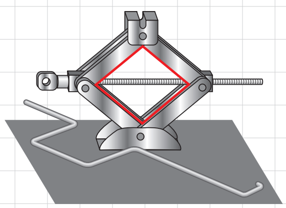
در هر لوزی قطرها .... یکدیگرند و قطرها روی .... زاویه‌ها می‌باشند.

کاردرکلاس

۱ــ نشان دهید متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن بر هم عمود باشند، لوزی است.

۲ــ نشان دهید متوازی‌الاضلاعی که در آن لااقل یک قطر روی نیمساز یک زاویهٔ آن باشد، لوزی است.

اکنون با توجه به ویژگی‌های مستطیل و لوزی نشان دهید در چه صورت مستطیل یا لوزی، مربع است.





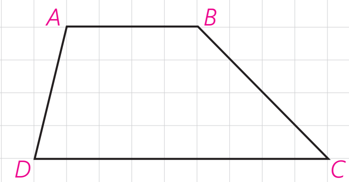
در شکل یک جک خودرو را می‌بینید. چهار بازوی آن یک لوزی تشکیل می‌دهند. آیا حالتی از جک وجود دارد که به شکل مربع درآید؟

اگر دو بازوی بالا با هم و دو بازوی پایین نیز باهم اندازه‌های مساوی داشته باشند، اما شکل جک لوزی نباشد، هنگام بسته‌شدن جک وقتی بخواهیم دو بازوی بالا روی دو بازوی پایین قرار گیرند چه مشکلی ایجاد می‌شود؟

ذوزنقه

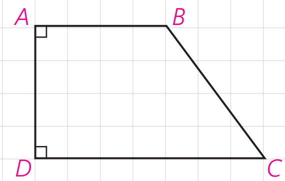
ذوزنقه چهارضلعی‌ای است که با چهارضلعی‌هایی که قبلاً بررسی کردیم، کمی متفاوت است.

تعریف: ذوزنقه چهارضلعی‌ای است که فقط دو ضلع آن موازی باشند.



هر یک از دو ضلع AB و CD را که موازی‌اند، **قاعده** و هر یک از دو ضلع غیرموازی را **ساق** می‌نامند. از موازی بودن قاعده‌های AB و CD و قاطع‌های BC و AD در مورد زاویه‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

زاویه‌های $\angle A$ و $\angle D$ ________ هستند. همچنین زاویه‌های $\angle B$ و $\angle C$ ________ هستند.

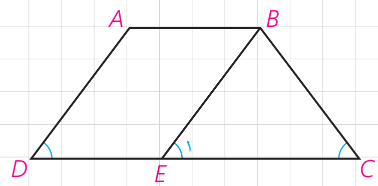


اگر در یک ذوزنقه اندازه‌های دو ساق برابر باشند، آن را ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین می‌نامند.

هرگاه در یک ذوزنقه یک ساق بر یکی از قاعده‌ها عمود باشد، مسلماً برقاعدهٔ دیگر نیز عمود است؛ چرا؟

در این صورت ذوزنقه را قائم‌الزاویه می‌نامند.

فعالیت ۷



ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD را که در آن AD = BC است، درنظر می‌گیریم.

از رأس B خطی موازی ساق AD رسم می‌کنیم تا قاعدهٔ DC را در E قطع کند. در این صورت چهارضلعی ABED ________ است.

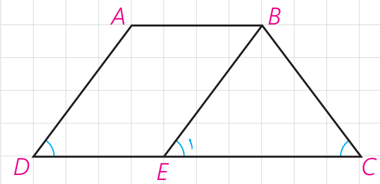
چرا دو زاویهٔ $\angle D$ و $\angle E_1$ هم اندازه‌اند؟

BC = BE چرا؟

بنابراین اندازهٔ $\angle E_1$ برابر اندازهٔ ________ است.

اکنون $\angle C$ و $\angle D$ هم‌اندازه‌اند. چرا؟ بنابراین :

> **در هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور به یک قاعده هم‌اندازه‌اند.**



آیا عکس این ویژگی نیز درست است؟

فرض کنید در ذوزنقه ABCD، دو زاویهٔ $\angle C$ و $\angle D$ هم‌اندازه‌اند. از B خطی موازی ساق AD رسم می‌کنیم تا قاعده CD را در E قطع کند. از اینکه $\angle D$ و $\angle E_1$ نیز هم‌اندازه‌اند، پس دو زاویهٔ ________ هم‌اندازه‌اند و در نتیجه BC = BE.

چون ABED متوازی‌الاضلاع است، پس AD = BE. در نتیجه، AD = BC است؛ بنابراین :

> **اگر در یک ذوزنقه دو زاویهٔ مجاور به یک قاعده هم‌اندازه باشند، ذوزنقه متساوی‌الساقین است.**

به کمک ویژگی ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، ویژگی زیر به سادگی ثابت می‌شود. آن را ثابت کنید.

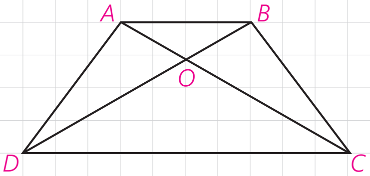
در هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، قطرها اندازه‌های مساوی دارند و بر عکس.

فعالیت ۸

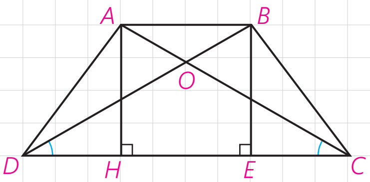
در ذوزنقهٔ ABCD :

$AD = BC$. از هم‌نهشتی کدام دو مثلث نتیجه می‌گیرید $AC = BD$ است؟

اما اثبات عکس آن نیاز به تفکر بیشتر دارد. فرض کنیم $DB = AC$. آیا می‌توانید در شکل مقابل دو مثلث هم‌نهشت پیدا کنید که از آن $AD = BC$ یا مساوی بودن اندازه‌های دو زاویهٔ مجاور به قاعده نتیجه شود؟



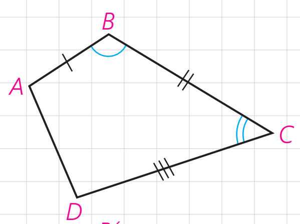
با کمی دقت مشاهده می‌کنید چنین دو مثلثی ظاهراً وجود ندارند؛ اما یک ویژگی در مسئله هست که از آن هنوز استفاده نکرده‌ایم. دو قاعدهٔ ذوزنقه موازی‌اند یا رأس‌های A و B از قاعدهٔ CD به یک فاصله‌اند. با رسم دو ارتفاع AH و BE و هم‌نهشتی دو مثلث ΔAHC و ΔBED تساوی اندازه‌های دو زاویه را نتیجه بگیرید. به کمک آنها هم‌نهشتی دو مثلث ΔADC و ΔBCD نتیجه می‌شود و به حل مسئله منجر خواهد شد.

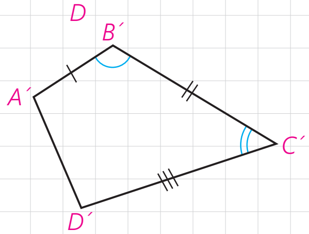


تمرین

۱ــ در کدام n ضلعی تعداد قطرها و ضلع‌ها برابر است؟

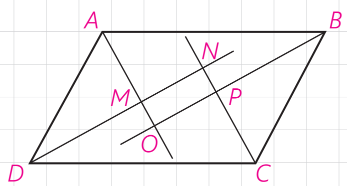
۲ــ در دو چهارضلعی مقابل $AB = A'B'$ و $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ است. چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟





اگر $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ و $\angle D = \angle D'$، در این حالت چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟

۳ــ از تقاطع نیمسازهای داخلی یک متوازی‌الاضلاع، چهارضلعی MNPQ پدید آمده است. ثابت کنید این چهارضلعی مستطیل است.

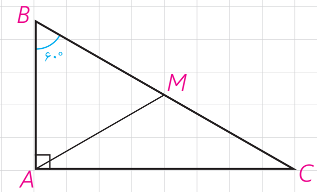


۴ــ مثلث قائم‌الزاویهٔ $\triangle ABC$ را که در آن $\angle A$ قائمه و اندازهٔ $\angle C$ برابر ۳۰° است، در نظر می‌گیریم. میانهٔ وارد بر وتر را رسم کنید. مثلث‌های AMC و AMB چگونه مثلث‌هایی هستند؟ نشان دهید $AB = \frac{BC}{۲}$ یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه اگر اندازهٔ یک زاویه ۳۰° باشد، اندازهٔ ضلع مقابل آن نصف اندازهٔ وتر است.

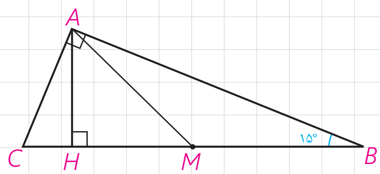
سپس با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث نشان دهید، $AC = \frac{\sqrt{۳}}{۲}BC$.

یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه اگر یک زاویه ۶۰° باشد، اندازهٔ ضلع مقابل آن $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ اندازهٔ وتر است.

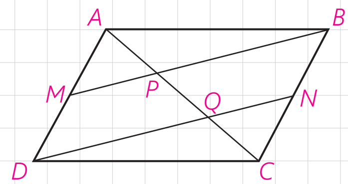
اکنون مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که اندازهٔ یک زاویهٔ آن ۴۵° باشد و نشان دهید که اندازهٔ هر ضلع زاویهٔ قائمه در آن $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ اندازهٔ وتر است.



۵ــ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ، اندازهٔ زاویهٔ B برابر ۱۵° است. با رسم میانه و ارتفاع وارد بر وتر نشان دهید اندازهٔ ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ اندازهٔ وتر است.



۶ــ در متوازی‌الاضلاع ABCD ، M و N به ترتیب وسط‌های ضلع‌های AD و BC می‌باشند. چرا خط‌های MB و DN موازی‌اند؟ به کمک آن ثابت کنید $AP = PQ = QC$.



۷ــ ثابت کنید اگر وسط‌های ضلع‌های هر چهارضلعی را به طور متوالی به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید.

این چهارضلعی باید چه ویژگی‌ای داشته‌باشد تا این متوازی‌الاضلاع مستطیل یا لوزی شود؟

چه رابطه‌ای بین محیط متوازی‌الاضلاع پدید آمده با اندازه‌های قطرهای چهارضلعی اولیه وجود دارد؟

درس دوم

مساحت و کاربردهای آن

یادآوری

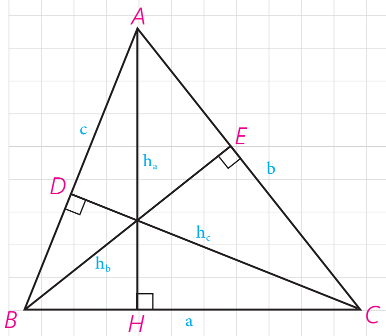
در سال‌های قبل با مساحت چهارضلعی‌های مهم آشنا شده‌اید.

۱ــ اگر اندازهٔ یک ضلع مربع a باشد، $S = a^2$ مساحت آن است.

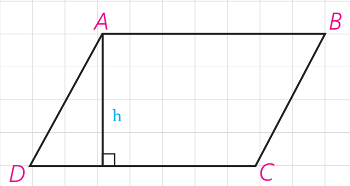
۲ــ اگر اندازهٔ یک ضلع مثلث a و اندازهٔ ارتفاع نظیر آن ضلع h_a باشد، آنگاه $S = \frac{1}{2} a h_a$

بنابراین در هر مثلث ABC اگر اندازهٔ ضلع‌های BC، AC و AB را به ترتیب با a، b و c و اندازه‌های ارتفاع‌های نظیر آنها را به ترتیب با h_a، h_b و h_c نشان دهیم آن‌گاه،

$$2S = ah_a = bh_b = ch_c$$



۳ــ اگر اندازهٔ یک ضلع متوازی‌الاضلاع a و اندازهٔ ارتفاع نظیر آن h باشد، $S = ah$.



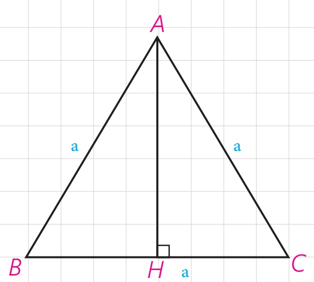
۴ــ اگر اندازه‌های دو قطر لوزی m و n باشند، $S = \frac{1}{2} mn$.

۵ــ اگر اندازه‌های دو قاعدهٔ یک ذوزنقه a و b و اندازهٔ ارتفاع آن h باشد. $S = \frac{(a+b)h}{2}$.

کار در کلاس

فرض کنیم اندازهٔ هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC برابر a باشد، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. ارتفاع AH میانه نیز است؛ چرا؟

به کمک قضیهٔ فیثاغورس نشان دهید $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ و $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

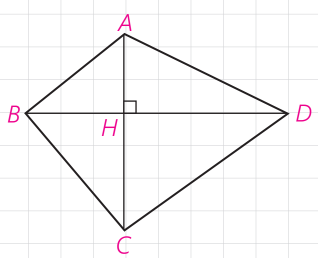


فعالیت

در چهارضلعی ABCD دو قطر AC و DB برهم عموداند.

$S_{ADB} =$ ....

$S_{DBC} =$ ....



با جمع این دو مساحت داریم،

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}BD(...+...) = \frac{۱}{۲}BD...$$

بنابراین؛

در هر چهارضلعی که دو قطر آن برهم عمود باشند، مساحت برابر است با، ______ .

کاربردهایی از مساحت

قبلاً با کاربرد مساحت در اثبات قضیهٔ تالس آشنا شدید. بعضی رابطه‌ها و ویژگی‌هایی را که با آن آشنا شده‌اید یادآوری می‌کنیم.

ویژگی ۱. در دو مثلث اگر اندازهٔ قاعده‌ها برابر باشند، نسبت مساحت‌ها برابر نسبت اندازهٔ ارتفاع‌های متناظر این قاعده‌هاست.

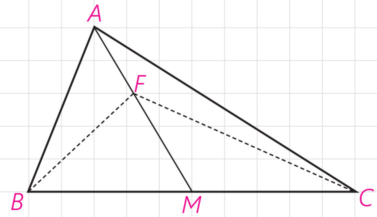
$$\frac{S}{S'} = \frac{h}{h'}$$

ویژگی ۲. در دو مثلث که اندازهٔ دو ارتفاع برابر باشد، نسبت مساحت‌ها برابر نسبت اندازه‌های قاعده‌های متناظر این دو ارتفاع است.

کاردرکلاس

نشان دهید یک میانه در هر مثلث، آن را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند.

اگر F هر نقطه‌ای روی میانهٔ AM به‌جز نقطهٔ M باشد آیا، $S_{FMC} = S_{FBM}$ است؟ چرا؟



فعالیت

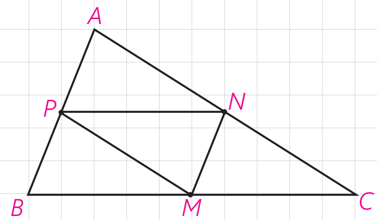
M و N و P وسط‌های سه ضلع مثلث ABC مطابق شکل‌اند.

پاره‌خط PN موازی ضلع ______ است و پاره‌خط PM موازی ضلع ______ است؛ چرا؟

بنابراین چهارضلعی PNCM ______ است، در نتیجه، $\Delta MNP \cong \Delta NMC$؛ چرا؟

به همین ترتیب برای بقیهٔ مثلث‌ها نیز می‌توان نشان داد که دو به دو هم‌نهشت‌اند.

$$\Delta APN \cong \Delta MNP \cong \Delta BPM$$

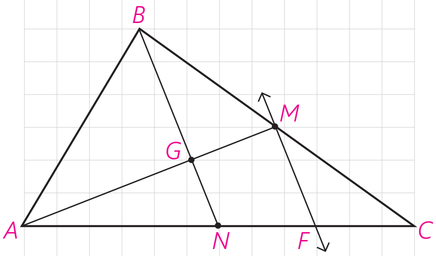


اگر وسط‌های سه ضلع هر مثلث را به هم متصل کنیم، چهار مثلث هم‌نهشت و در نتیجه با مساحت‌های برابر پدید می‌آید.

فعالیت

در این فعالیت ویژگی مهمی از سه میانهٔ مثلث را ثابت می‌کنید.

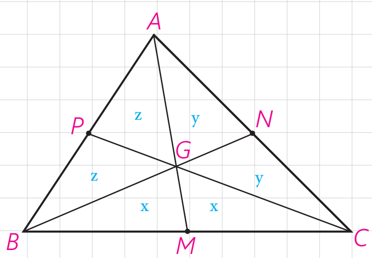
دو میانهٔ AM و BN از ΔABC را رسم می‌کنیم. یکدیگر را در نقطهٔ G درون مثلث قطع می‌کنند. از M وسط ضلع BC خطی را موازی میانهٔ BN رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در F قطع کند. چرا F وسط NC است؟ N وسط ضلع AC است؛ بنابراین، $AF = ۳NF$. چرا؟ در نتیجه، $AM = ۳GM$. چرا؟



بنابراین، $GM = \frac{۱}{۳}$..... و $AG = \frac{۲}{۳}$..... و G بین A و M است؛ در نتیجه G تنها نقطه‌ای روی نیم‌خط AM است که $AG = \frac{۲}{۳}AM$. مشابه آن ثابت می‌شود $BG = \frac{۲}{۳}BN$. پس برای هر دو میانهٔ دلخواه نقطهٔ G با این ویژگی به‌دست می‌آید در نتیجه هر سه میانه در G همرس‌اند.

به روش دیگر، می‌توانید از M به N وصل کنید و از تشابه دو مثلث GMN و GAB استفاده کنید؛ چون AB=۲MN پس AG=۲GM و BG=۲GN. اکنون می‌توانید مانند روش قبلی ادامه دهید.

سه میانهٔ هر مثلث در نقطه‌ای درون آن مثلث همرس‌اند؛ به طوری که فاصلهٔ این نقطه تا وسط هر ضلع برابر $\frac{۱}{۳}$ اندازهٔ میانه نظیر این ضلع است، و فاصله‌اش تا هر رأس $\frac{۲}{۳}$ اندازهٔ میانهٔ نظیر آن رأس است.



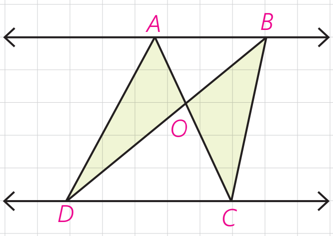
با رسم سه میانهٔ مثلث نشان دهید، سه میانهٔ مثلث آن را به شش مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کنند. بنابر فعالیت قبلی $S_{BGM} = S_{MGC} = x$. چرا؟

به همین ترتیب برای بقیه برقرار است.

اکنون میانهٔ AM را درنظر بگیرید، ______ = $۲z + x$ در نتیجه ______ = y .

میانهٔ BN را درنظر بگیرید ______ = $۲z + y$ در نتیجه، ______ = z. پس، ______

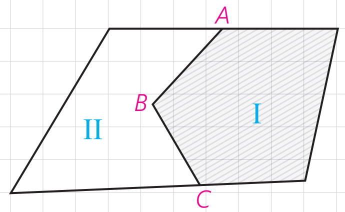
ویژگی ۳. فرض کنیم دو خط AB و CD موازی باشند؛ به‌طوری که دو خط AC و BD در نقطه‌ای مانند O متقاطع باشند. می‌دانیم: $S_{ADC} = S_{BDC}$. چگونه از آن نتیجه می‌گیرید، $S_{OAD} = S_{OBC}$ ؟



این ویژگی که در هر ذوزنقه نیز برقرار است، در حل مسائل کاربرد خوبی دارد.

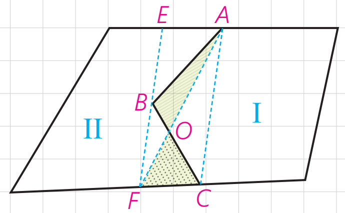
یک مسئله

در شکل دو مزرعهٔ I و II متعلق به دو کشاورز است. این دو کشاورز برای استفاده از ماشین‌های کشاورزی می‌خواهند مرز مشترک ABC بین دو زمین خود را به یک پاره‌خط مستقیم تبدیل کنند به‌طوری که مساحت‌های زمین‌های آنها تغییر نکند. چگونه شما می‌توانید این کار را برای آنها انجام دهید؟



فکر اصلی این عمل براساس مسئلهٔ قبلی است.

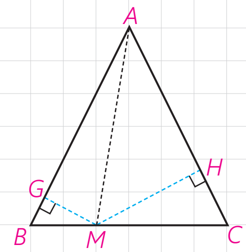
از A به C متصل، و از B موازی خط AC رسم کنید تا دو مرز دیگر را در E و F قطع کند. اکنون نشان دهید این مرز مشترک جدید می‌تواند مرز AF باشد؛ چرا؟ البته می‌تواند مرز EC نیز باشد.



فعالیت

در مثلث متساوی‌الساقین ABC که AB = AC است؛ نقطهٔ دلخواه M را روی ضلع BC بین B و C درنظر بگیرید. از M دو عمود MH و MG را به ترتیب بر دو ساق AC و AB رسم کنید. S_{AMC} و S_{AMB} را بنویسید.

مساحت مثلث ABC را نیز وقتی پاره‌خط AB یا AC قاعده باشند، بنویسید. چه رابطه‌ای بین این مساحت‌ها وجود دارد؟ آن را بنویسید. از این رابطه چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

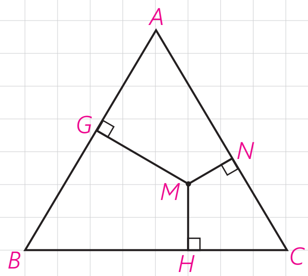


در هر مثلث متساوی‌الساقین ABC که AB=AC است، مجموع فاصله‌های هر نقطه روی قاعده BC از .... برابر .... است.

به همین ترتیب نشان دهید در هر مثلث متساوی‌الساقین ABC، قدرمطلق تفاضل فاصله‌های هر نقطه روی امتدادهای قاعدهٔ BC از خط‌های شامل دو ساق برابر اندازهٔ ارتفاع وارد بر ساق است.

فعالیت

نقطهٔ دلخواه M را درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع به اندازهٔ a درنظر بگیرید. سپس از M سه عمود بر سه ضلع رسم کنید. از M به سه رأس مثلث ABC متصل کنید. مساحت‌های سه مثلث MAC ، MBC و MAB را محاسبه کنید. این مساحت‌ها با مساحت ΔABC چه رابطه‌ای دارند؟ آن را بنویسید. از آن چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

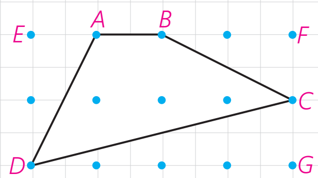


$MH + MN + MG =$ ....

مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع برابر ....

اگر در یک مثلث متساوی‌الاضلاع فاصله‌های نقطهٔ M درون مثلث از سه ضلع، برابر ۲، ۴ و ۶ باشند. اندازهٔ ضلع مثلث را محاسبه کنید.

نقاط شبکه‌ای و مساحت



مطابق شکل نقطه‌ها روی خط‌های افقی و عمودی واقع‌اند؛ به‌طوری که فاصلهٔ هر دو نقطه متوالی روی یک خط افقی (عمودی) برابر واحد است. چنین نقاطی را نقاط شبکه‌ای و چندضلعی‌هایی مانند ABCD را که تمام رأس‌های آنها روی نقاط شبکه‌ای واقع‌اند، چندضلعی‌های شبکه‌ای می‌نامند.

نقاط شبکه‌ای روی رأس‌ها و ضلع‌های چندضلعی را نقاط مرزی و نقاط شبکه‌ای درون چندضلعی‌ها را نقاط درونی شبکه‌ای برای چندضلعی شبکه‌ای می‌نامند.

به‌طور مثال در شکل بالا چهارضلعی ABCD یک چهارضلعی شبکه‌ای است که دارای ۴ نقطهٔ مرزی و ۳ نقطه درونی شبکه‌ای است.

در این چهارضلعی، شبکه‌ای با به کاربردن مساحت مثلث‌های قائم‌الزاویه و مستطیل نشان دهید مساحت چهارضلعی ABCD برابر ۴ واحد سطح است.
می‌توان نقاط شبکه‌ای را در دستگاه مختصات عمود بر هم x´x و y´y نیز به صورت زوج مرتب‌های (x و y) که x و y هر دو اعداد صحیح‌اند، نشان داد. x و y مختص‌های هر نقطه‌اند.

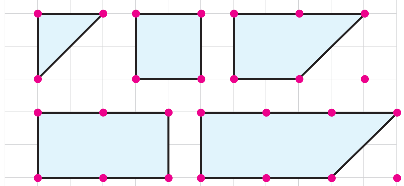
در چندضلعی‌های شبکه‌ای، تعداد نقاط مرزی شبکه‌ای را با b و تعداد نقاط درونی شبکه‌ای را با i نشان می‌دهند. اکنون می‌خواهیم به‌طور شهودی رابطه‌ای بین مساحت چندضلعی شبکه‌ای و نقاط مرزی و درونی شبکه‌ای نظیر آن را پیدا کنیم.

فعالیت

۱ــ یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطهٔ مرزی می‌تواند داشته باشد؟ چرا؟

۲ــ یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطهٔ درونی می‌تواند داشته باشد؟

۳ــ در تمام چندضلعی‌های شبکه‌ای زیر تعداد نقطه‌های درونی شبکه‌ای صفر است، یعنی $i = ۰$ و تعداد نقاط مرزی، ________ ، $b = ۳،۴،۵$.



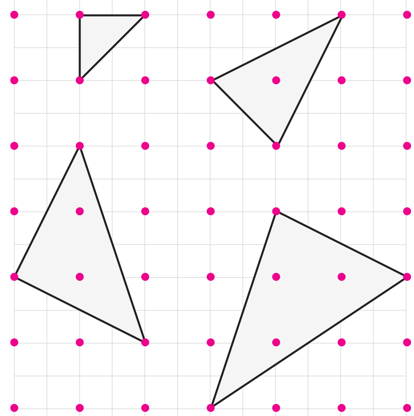
جدول زیر را با محاسبهٔ مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای کامل کنید.

i = ۰ ، b = ۳،۴،۵ ، ______

تعداد نقاط مرزی b	۳	۴	۵	۶	۷	۸
مساحت	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$			

بین مساحت و تعداد نقاط مرزی چه رابطه‌ای وجود دارد؟

$S=\frac{b}{....}-.......+۰$



۴ــ اکنون نقاط مرزی را ثابت نگه دارید و نقاط درونی را تغییر دهید. فرض کنید تعداد نقاط مرزی شبکه‌ای ۳ = b باشند. با توجه به شکل‌ها جدول زیر را کامل کنید. (نتیجه‌گیری $S=\frac{b}{۲}-۱+۰$ را که در قسمت (۳) پیدا کرده‌اید درنظر داشته باشید.)

تعداد نقاط درونی i	۰	۱	۲	۳	۴	۵
$\frac{b}{۲}-۱$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	
S	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$				

با تکمیل جدول بالا و مقایسهٔ اعداد هر ستون تشخیص دهید که مساحت هر چندضلعی شبکه‌ای با تعداد نقاط مرزی و درونی چه ارتباطی دارد. از این جدول نتیجه بگیرید b و i با چه ضریب‌هایی ظاهر می‌شوند.

$S=\frac{b}{....}-.......+.......$

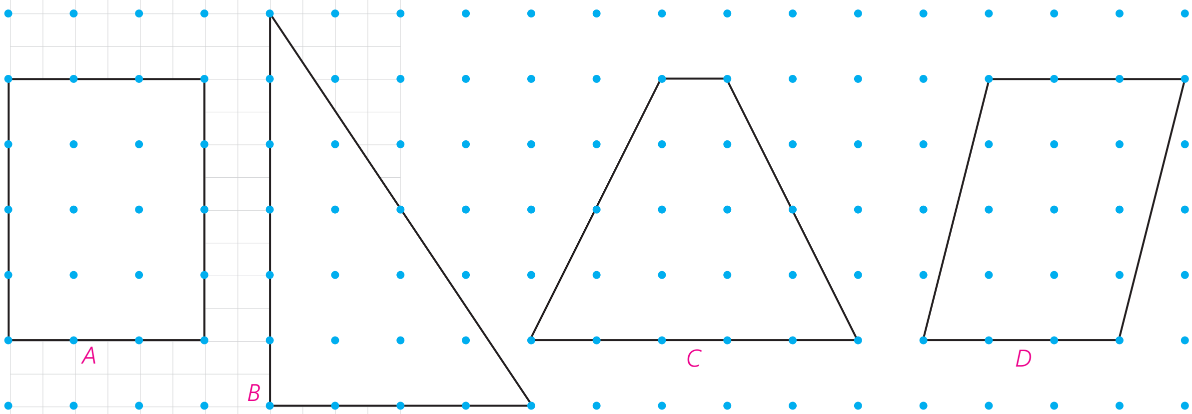
توجه داشته باشید که این فرمول را به‌طور شهودی پیدا کرده‌ایم. اثبات دقیق این فرمول در حالت کلی نیاز به مقدمات بیشتری دارد.

این فرمول به فرمول پیک معروف است که جرج الکساندر پیک (۱۹۴۳ــ ۱۸۵۹) آن را کشف کرد و از سال ۱۹۷۰ به‌طور گسترده‌ای در کتاب‌های هندسهٔ مقدماتی به‌کار برده شده است.

به کمک این فرمول می‌توانیم مساحت شکل‌های نامنظم هندسی را نیز به‌طور تقریبی پیدا کنیم.

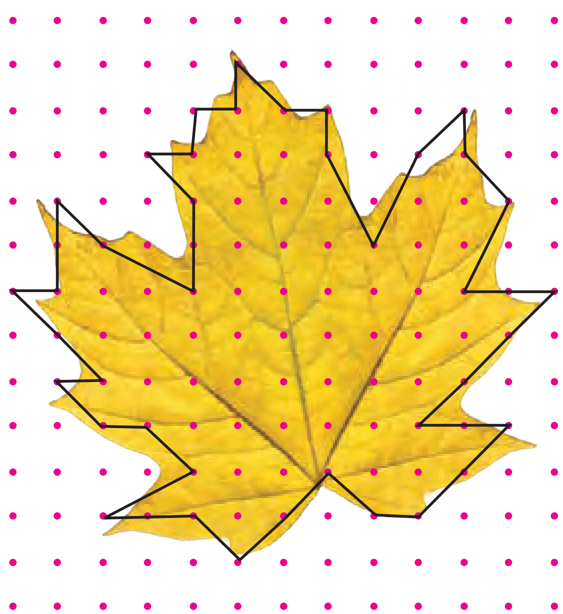
کاردرکلاس

۱ــ چندضلعی‌های A، B، C و D را در شکل‌های زیر درنظر بگیرید. ابتدا به روش‌های هندسی که از قبل می‌دانید، مساحت آنها را محاسبه کنید؛ سپس با تعیین تعداد نقاط مرزی و درونی، جدول زیر را تکمیل و فرمول پیک را در آنها تحقیق کنید.



چند ضلعی	A	B	C	D
تعداد نقاط مرزی b				
تعداد نقاط درونی i				
مساحت				

کاردرکلاس

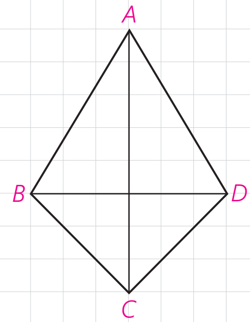


اگر فاصلهٔ نقطه‌های شبکه‌ای یک سانتی‌متر باشد، یک برگ درخت را روی یک صفحهٔ شطرنجی قرار دهید و با رسم آن مساحت آن را به‌طور تقریبی محاسبه کنید.

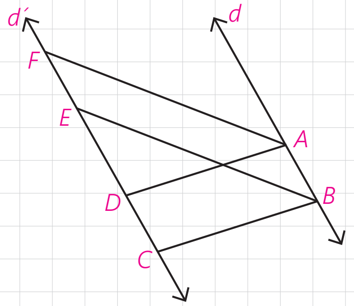
واضح است که با کوچک‌تر کردن واحد می‌توانیم مساحت را با تقریب بهتری محاسبه کنیم.

تمرین

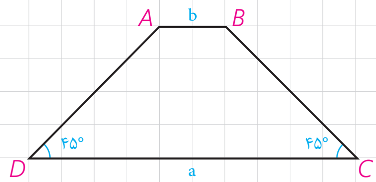
۱ــ در یک لوزی اندازهٔ هر ضلع $۲\sqrt{۱۰}$ و نسبت اندازه‌های دو قطر $\frac{۱}{۳}$ است. مساحت لوزی را پیدا کنید.



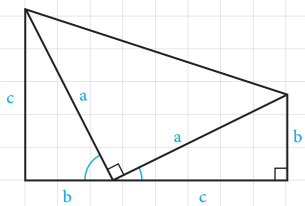
۲ــ در چهارضلعی ABCD، مطابق شکل AB = AD و BC = CD است. آیا قطرهای این چهارضلعی برهم عمودند؟ چرا؟ نشان دهید در این چهارضلعی قطر AC روی نیمسازهای $\angle A$ و $\angle C$ است. اگر اندازه‌های دو قطر ۸ و ۶ باشند، مساحت آن را محاسبه کنید. چهارضلعی‌ای با این ویژگی کایت نام دارد. نشان دهید در کایت یک قطر عمودمنصف قطر دیگر است.



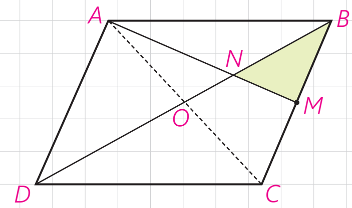
۳ــ در شکل دو خط d و d′ موازی‌اند و ABCD و ABEF هردو متوازی‌الاضلاع‌اند. اگر مساحت یکی از این متوازی‌الاضلاع‌ها برابر S باشد، مساحت دیگری برحسب S چقدر است؟



۴ــ در ذوزنقهٔ شکل مقابل اندازه‌های دو قاعده a و b و اندازه‌های دو زاویهٔ مجاور به یک قاعده ۴۵° است. مساحت ذوزنقه را برحسب a و b محاسبه کنید. از A و B بر قاعده DC عمود کنید.



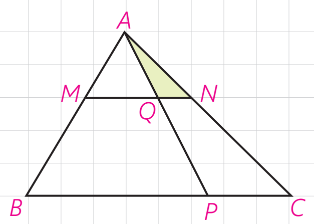
۵ــ مساحت ذوزنقهٔ مقابل را به‌دو طریق به‌دست آورید. از مساوی قرار دادن آنها چه نتیجه‌ای به‌دست می‌آید؟



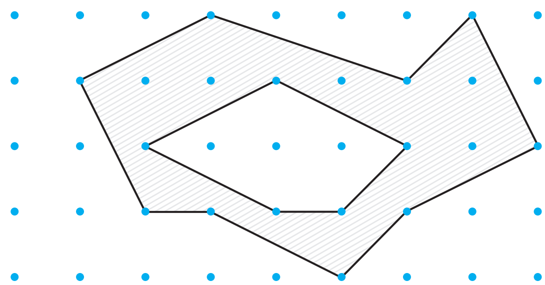
۶ــ در متوازی‌الاضلاع ABCD، M وسط ضلع BC است و پاره‌خط AM قطر BD را در N قطع کرده‌است. نشان دهید:

$S_{BMN} = \frac{۱}{۱۲} S_{ABCD}$.

۷ــ در مثلث ABC، خط MN موازی ضلع BC است و $\frac{AM}{MB}=\frac{۱}{۲}$. همچنین $\frac{PC}{PB}=\frac{۱}{۳}$ است. S_{AQN} و S_{MQPB} چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

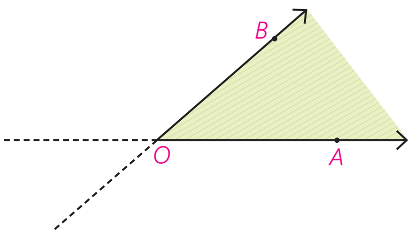


۸ــ با توجه به مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای، مساحت قسمت سایه‌زده را محاسبه کنید. (راهنمایی: مساحت چند ضلعی داخلی را از مساحت چند ضلعی بیرونی کم کنید.)

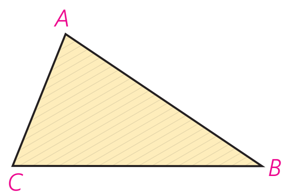


۹ــ یک مستطیل شبکه‌ای با ضلع‌های افقی و قائم که اندازه‌های ضلع‌های آن m و n واحداند مفروض است. مساحت آن را ابتدا به روش معمول و سپس به کمک فرمول پیک محاسبه و آنها را مقایسه کنید.

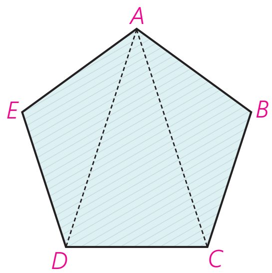
۱۰ــ مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای ۳ واحد است. جدولی تشکیل دهید و تعداد نقاط مرزی و تعداد نقاط درونی را در حالت‌هایی که امکان دارد، مشخص کنید. اگر این چندضلعی شبکه‌ای مثلث باشد در هر حالت شکل آن را رسم کنید. در حالتی که نقاط مرزی بیشترین تعداد ممکن را دارند، شکل‌های چهارضلعی‌های نظیر آن را نیز رسم کنید.



مساحت یکی از مفاهیم اساسی هندسه است.
وقتی با یک زاویهٔ هندسی $\angle AOB$ روبه‌رو هستیم که اجتماع دو نیم‌خط OA و OB است، قسمت سایه زده مطابق شکل را درون زاویهٔ $\angle AOB$ می‌نامند. به‌طور دقیق‌تر اشتراک طرفی از خط OA را که شامل B است با طرفی از خط OB که شامل A است، درون زاویهٔ $\angle AOB$ می‌نامند.



به همین ترتیب اشتراک درون زاویه‌های مثلث را درون مثلث می‌نامند. درون مثلث و روی مثلث را ناحیهٔ مثلثی می‌نامند.



سرانجام ناحیهٔ چندضلعی شکلی است که بتوان آن را به‌صورت اجتماع تعداد متناهی ناحیه‌های مثلثی تبدیل کرد به‌طوری که اگر دو ناحیهٔ مثلثی اشتراک داشته باشند، این اشتراک روی ضلعی از هردو یا رأسی از هردو باشد. به هر ناحیهٔ چندضلعی عددی حقیقی و مثبت نظیر می‌کنیم که مساحت آن نامیده می‌شود.

فرض کنیم A هر ناحیهٔ چندضلعی باشد. عددی حقیقی و مثبت به A نظیر می‌کنیم که آن را مساحت A می‌نامیم و با S(A) نشان می‌دهیم که شرایط زیر در آن برقرار است:

۱ $S(A) > 0$

۲ اگر دو مثلث هم‌نهشت باشند، مساحت‌های آنها برابرند.

۳ اگر اشتراک دو ناحیهٔ چندضلعی فقط روی ضلع‌ها یا رأس‌ها باشد یا اصلاً اشتراک نداشته باشد، مساحت اجتماع آنها برابر مجموع مساحت‌های آنهاست.

۴ مساحت مستطیل با ضلع‌های به اندازه‌های a و b برابر $S = ab$ است.

برای سادگی به جای مساحت ناحیهٔ چندضلعی، همان مساحت چندضلعی را به‌کار می‌بریم.

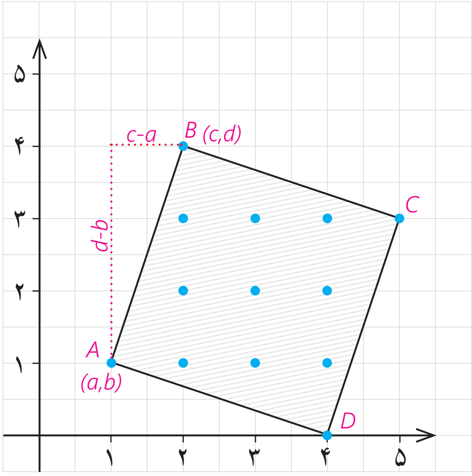
ویژگی‌های چهارضلعی‌های مهم در یک نگاه

جدول زیر را تکمیل کنید.

چهارضلعی / ویژگی	ذوزنقه متساوی‌الساقین	ذوزنقه	مربع	لوزی	مستطیل	متوازی‌الاضلاع
مساوی بودن اندازهٔ ضلع‌ها						هردو ضلع مقابل
موازی بودن ضلع‌ها						هردو ضلع مقابل
عمود بودن ضلع‌ها	کلاً وجود ندارد					به‌شرطی که مستطیل یا مربع باشد
زاویه‌های با اندازه‌های برابر						
زاویه‌های مکمل						
وضعیت قطرها نسبت به هم	اندازه‌های مساوی دارند					

دربارهٔ چندضلعی‌های شبکه‌ای بیشتر بدانیم

نقطهٔ شبکه‌ای در دستگاه محورها، نقطه‌ای به مختصات $(x،y)$ است که x و y اعدادی صحیح‌اند. بنابر فرمول پیک مساحت هر چندضلعی شبکه‌ای $S=\frac{b}{۲}+i-۱$ همواره عددی گویا و مثبت است. بنابراین اگر b زوج باشد، S عددی صحیح است.

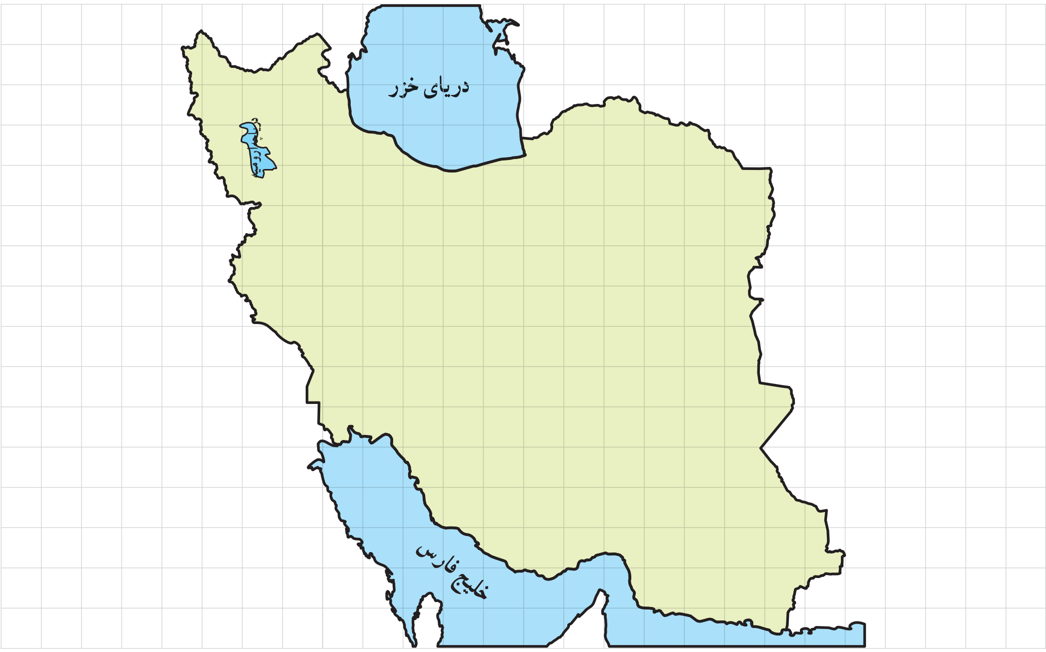


در هر مربع شبکه‌ای مساحت صحیح و مثبت است، زیرا اگر $(a،b)$ و $(c،d)$ دو رأس مجاور مربع باشند، $S=(a-c)^۲+(b-d)^۲$ (چرا؟) که a، b، c و d صحیح‌اند. حال اگر مثلث متساوی‌الاضلاعی شبکه‌ای داشته باشیم، بنابر فرمول پیک مساحت آن عددی گویا و مثبت است. از طرف دیگر اگر m اندازهٔ هر ضلع آن باشد، $S=\frac{m^۲\sqrt{۳}}{۴}$ مساحت آن است.

اما، $m^۲=(a-c)^۲+(b-d)^۲$، که صحیح و مثبت است در نتیجه $\frac{m^۲\sqrt{۳}}{۴}$ عددی گنگ یا اصم است که متناقض با آن چیزی است که از فرمول پیک به دست می‌آید؛ بنابراین

هیچ مثلث متساوی‌الاضلاعی وجود ندارد که مختصات تمام رأس‌های آن اعداد صحیح باشند.

در شکل زیر نقشهٔ ایران را مشاهده می‌کنید. می‌توانید با انتخاب واحدهای مناسب مساحت آن را به طور تقریبی پیدا کنید.



فصل چهارم

۴

تجسم فضایی



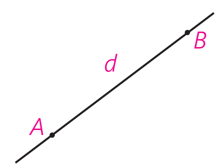


تصویر سمت راست، آرامگاه ابوعلی سینا، واقع در همدان است. در مورد تصویر سمت چپ چه حدسی می‌زنید؟

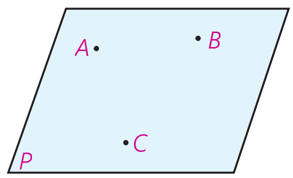
درس اول

خط، نقطه و صفحه

مفاهیم **نقطه**، **خط** و **صفحه** از اساسی‌ترین مفاهیم در هندسه است که معمولاً برای نمایش آنها به صورت زیر عمل می‌کنیم :



خط AB یا BA، یا خط d

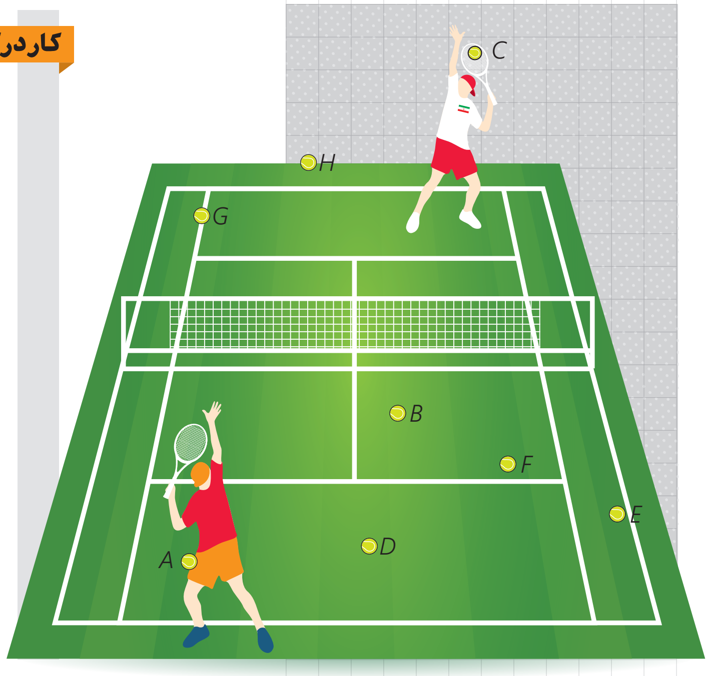


صفحهٔ ABC، BAC، ... یا صفحهٔ P

خط راست از هر دو طرف نامحدود است. صفحه نیز از هر طرف ادامه دارد و ضخامتی ندارد.

کار در کلاس

به این تصویر دقت کنید. توپ A داخل جیب یکی از بازیکن‌ها و توپ C روی راکت بازیکن دیگر است و بقیهٔ توپ‌های تنیس روی زمین افتاده‌اند.



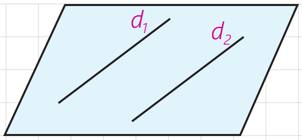
الف) سه توپ نام ببرید که در یک راستا هستند.

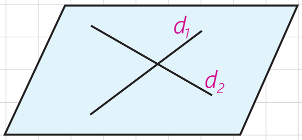
ب) سه توپ نام ببرید که در یک صفحه‌اند ولی هم راستا نیستند.

ج) چهار توپ نام ببرید که همگی در یک صفحه نیستند.

حالت‌های مختلف دو خط در صفحه و فضا

به تصاویر روبه‌رو نگاه کنید.



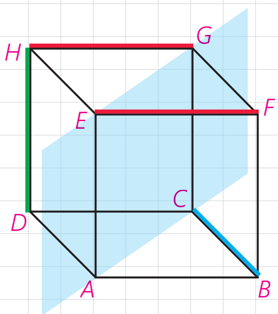


دو خط در یک صفحه نسبت به هم موازی یا متقاطع‌اند. وقتی دو خط برهم منطبق می‌شوند، آنها را یک خط در نظر می‌گیریم.

فعالیت

مکعب روبه‌رو را در نظر بگیرید.

در هر مورد وضعیت دو خط را نسبت به هم مشخص کنید و بنویسید که آیا می‌توان صفحه‌ای شامل آن دو در نظر گرفت؟

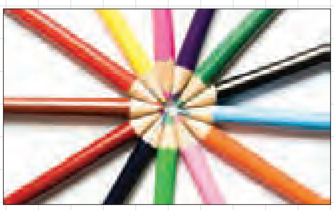


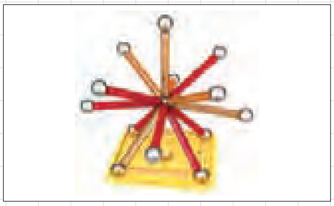
HG و EF :	HD و HG :
GC و EA :	FD و EC :
BC و HD :	AB و GD :

تعریف: دو خط را که نقطهٔ اشتراکی ندارند، در نظر بگیرید:

۱) اگر صفحه‌ای وجود داشته باشد که شامل هر دوی آنها باشد، آن دو خط را موازی می نامیم.

۲) اگر هیچ صفحه‌ای وجود نداشته باشد که شامل هر دوی آنها باشد، آن دو خط را متنافر می نامیم.



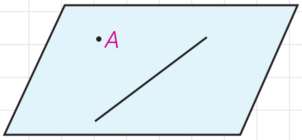


دو خط در فضا نسبت به هم .... یا .... یا .... هستند.

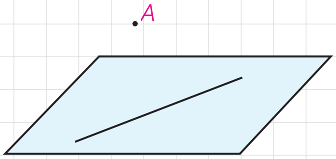
کاردرکلاس

۱ــ به سؤالات زیر پاسخ دهید.
(می‌توانید از تصاویر کمک بگیرید.)

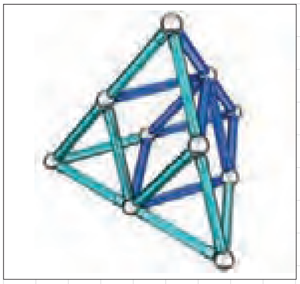
ــ در صفحه از هر نقطه چند خط می‌گذرد؟
در فضا چطور؟



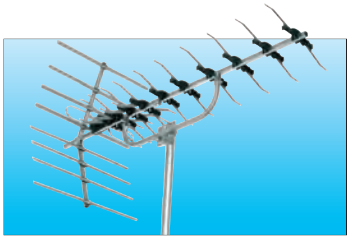
ــ در صفحه از یک نقطه غیر واقع بر یک خط، چند خط موازی آن خط می‌توان رسم کرد؟
در فضا چطور؟



۲ــ در شکل‌های زیر در صورت وجود، به خطوط موازی، متقاطع و متنافر اشاره کنید.



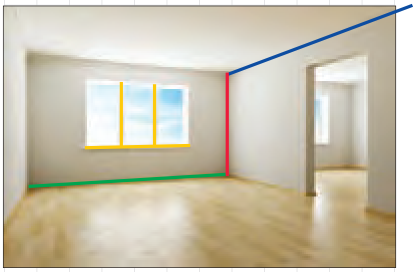




۳ــ دو خط موازی رسم کنید و آنها را d_1 و d_2 بنامید.
حالا خط d_3 را موازی با d_2 رسم کنید. دو خط d_3 و d_1 نسبت به هم چه وضعی دارند؟

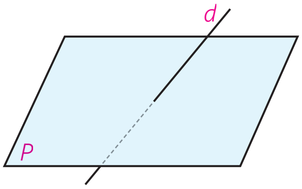
نتیجه ۱: در یک صفحه دو خط موازی با یک خط ______ .

آیا در فضا نیز این نتیجه برقرار است؟



۴ــ می‌دانیم که در صفحه دو خط عمود بر یک خط، با هم موازی‌اند.
آیا در فضا هم این رابطه برقرار است؟

۵ــ خط d با صفحهٔ P متقاطع است.
خط‌های موجود در صفحهٔ P نسبت به خط d چه وضعیت‌هایی می‌توانند داشته باشند؟



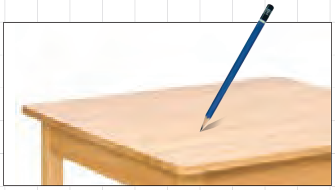
حالت‌های مختلف خط و صفحه

مدادتان را طوری در دست بگیرید که مداد یا امتداد آن، صفحهٔ میز را قطع نکند.



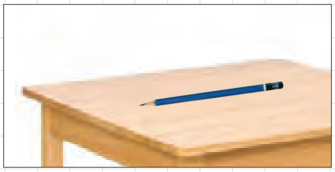
اگر خط و صفحه با هم اشتراکی نداشته باشند، نسبت به هم ______ هستند.

نوک مداد را روی میز بگذارید.
در این حالت مدادتان در یک نقطه با میز اشتراک دارد.



اگر خط و صفحه در یک نقطه مشترک باشند، نسبت به هم ______ هستند.

مدادتان را روی میز قرار دهید.



اگر خط و صفحه بی‌شمار نقطهٔ اشتراک داشته باشند خط بر صفحه واقع است.

خط و صفحه در فضا نسبت به هم ______ یا ______ هستند یا خط بر صفحه ______ است.

کاردرکلاس

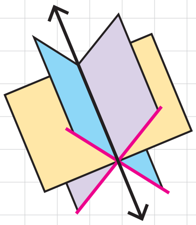
۱ــ به سؤالات زیر پاسخ دهید. (می‌توانید از تصاویر کمک بگیرید.)

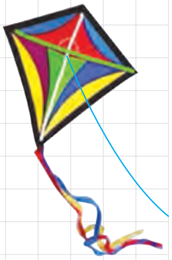
ــ از یک خط در فضا چند صفحه می‌گذرد؟

ــ از دو خط متقاطع چند صفحه می‌گذرد؟

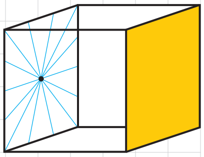
ــ از دو خط موازی چطور؟

ــ از یک نقطهٔ غیرواقع بر یک صفحه، چند خط موازی با آن صفحه می‌توان رسم کرد؟

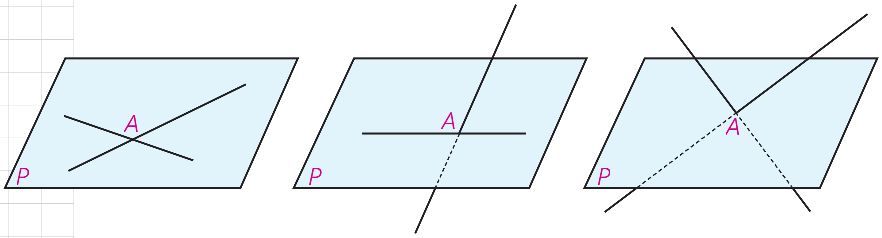








۲ــ دو خط در نقطهٔ A متقاطع‌اند و صفحهٔ P شامل نقطهٔ A است. با توجه به شکل‌های زیر حالت‌های مختلف خطوط متقاطع و صفحهٔ P را بررسی کنید.



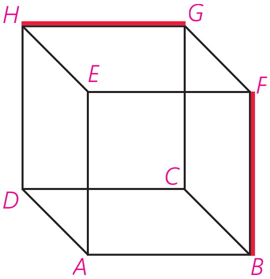
۳ــ دو خط d_1 و d_2 در فضا با هم موازی‌اند.

الف) اگر صفحه‌ای مثل P با یکی از این دو خط موازی باشد، نسبت به دیگری چه وضعی دارد؟

ب) اگر صفحهٔ P شامل یکی از این دو خط باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟

ج) اگر صفحهٔ P با یکی از این خطوط متقاطع باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟

۴ــ مسئلهٔ قبل را برای حالتی حل کنید که دو خط، متنافرند.

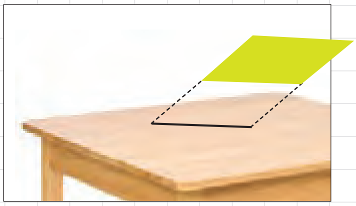


حالت‌های مختلف دو صفحه



یک برگه را طوری در دست بگیرید
که خودش یا امتداد آن صفحهٔ میز را قطع نکند.

اگر دو صفحه با هم نقطه اشتراکی نداشته باشند، نسبت به هم ______ هستند.



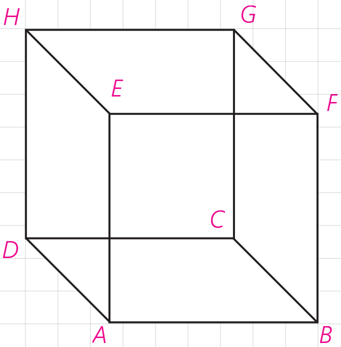
برگه را طوری در دست بگیرید که خودش یا امتداد آن صفحهٔ میز را قطع کند.
اشتراک صفحه‌ای که برگه قسمتی از آن است، با سطح میز به چه شکلی است؟

اگر دو صفحه در یک خط راست مشترک باشند، نسبت به هم ______ هستند.

خط راستی که اشتراک دو صفحهٔ متقاطع است، **فصل مشترک** آن دو صفحه نامیده می‌شود.

دو صفحه در فضا نسبت به هم ______ یا ______ هستند. وقتی دو صفحه برهم منطبق می‌شوند، آنها را یک صفحه در نظر می‌گیریم.

کار در کلاس



به این مکعب دقت کنید :

الف) خط‌های GF و DA نسبت به هم چه وضعی دارند؟

HG و DC چطور؟

EF و GC چطور؟

ب) هر خط با چند خط دیگر متقاطع است؟

با چند خط موازی است؟

با چند خط متنافر است؟

ج) HD با کدام صفحه موازی است؟

با کدام متقاطع است؟

بر کدام واقع است؟

د) دو صفحهٔ موازی و دو صفحهٔ متقاطع نام ببرید.

تعامد

نوک مداد خود را مطابق شکل به‌صورت قائم بر صفحهٔ کتاب نگه دارید.
در این حالت مدادتان با بقیهٔ خط‌های موجود در صفحه که از نقطهٔ تقاطع مداد و سطح میز می گذرند، چه وضعیتی دارد؟

تعریف: فرض کنید خط l در نقطهٔ A صفحهٔ P را قطع می‌کند. خط l بر صفحهٔ P عمود است؛ هرگاه برتمام خط‌های صفحهٔ P که از نقطهٔ A می‌گذرند، عمود باشد.

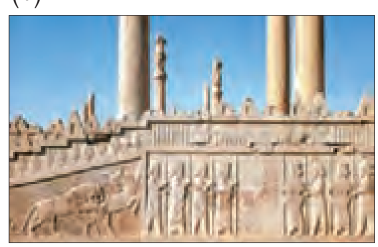
آیا اگر خطی فقط بر یکی از خطوط صفحه‌ای عمود باشد، می‌توانیم بگوییم آن خط به آن صفحه عمود است؟

می‌توان نشان داد که:

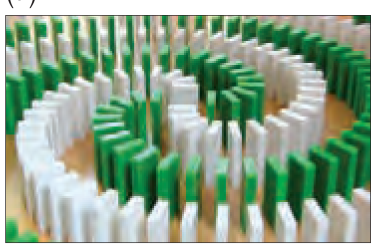
اگر خطی بر دو خط متقاطع از صفحه‌ای، در محل تقاطع عمود باشد، بر آن صفحه عمود است.

تعریف: دو صفحه بر هم عمودند؛ هر گاه هر کدام شامل خطی باشد که بر دیگری عمود است.

کاردرکلاس



(۱)



(۲)

می‌دانیم که در صفحه، دو خط عمود بر یک خط با هم موازی‌اند.

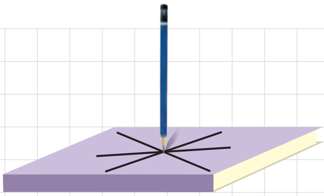
الف) آیا دو خط عمود بر یک صفحه همیشه با هم موازی‌اند؟

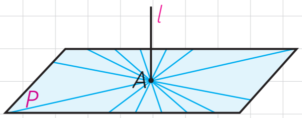
ب) آیا دو صفحهٔ عمود بر یک صفحه همیشه با هم موازی‌اند؟

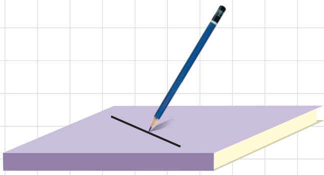
ج) دو صفحهٔ عمود بر یک خط نسبت به هم چه وضعی دارند؟

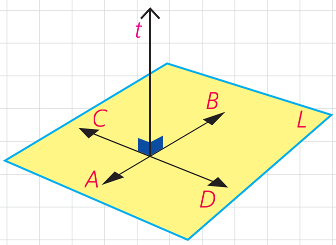
د) اگر خطی بر یکی از دو صفحهٔ موازی عمود باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟

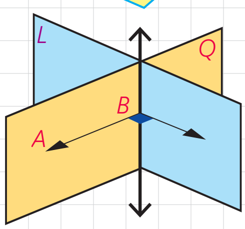
هـ) اگر یکی از دو خط موازی بر صفحه‌ای عمود باشد، وضعیت خط دوم با صفحه را بررسی کنید.

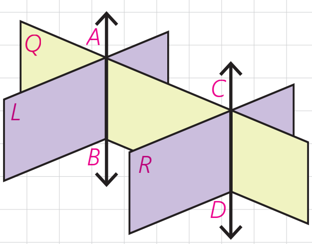




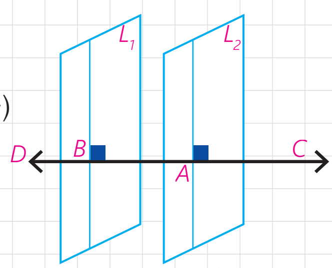




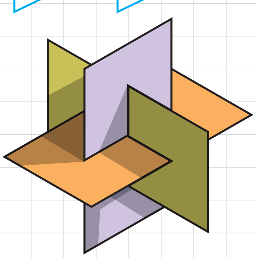




(۳)

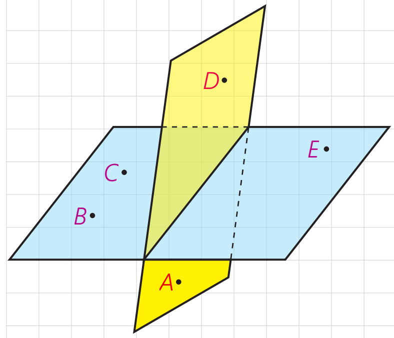


(۴)



(۵)

تمرین



۱ــ با توجه به شکل به سؤالات پاسخ دهید :

الف) چند صفحه در شکل می‌بینید، نام ببرید.

ب) سه نقطه پیدا کنید که در یک صفحه‌اند.

ج) چهار نقطه پیدا کنید که در یک صفحه نیستند.

د) دو خط AB و CE نسبت به هم چه وضعی دارند؟ AC و CE چطور؟

۲ــ دو صفحهٔ P_1 و P_2 را به‌گونه‌ای در نظر بگیرید که متقاطع باشند و خط d فصل مشترک آنها باشد (در هر دو حالت الف و ب تصویر مناسب را رسم کنید).

الف) اگر P' صفحه‌ای باشد که با P_1 موازی باشد، نسبت به P_2 چه وضعیتی خواهد داشت.

ب) اگر P' صفحه‌ای باشد که با P_1 متقاطع است، با P_2 چه وضعیتی می‌تواند داشته باشد.

۳ــ شکل زیر یک دیوار و یک در دولنگه را که در دیوار قرار گرفته است، نشان می‌دهد. وضعیت خط‌ها و صفحه‌های زیر را مشخص کنید.

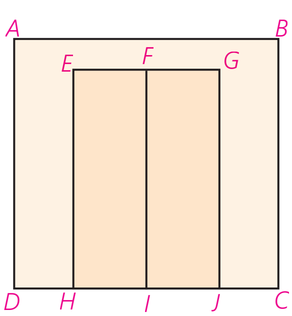
الف) وضعیت صفحات EFIH و ABCD و FGJI را دو به‌دو نسبت به هم بررسی کنید.

ب) خطوط FI و BC

ج) خطوط FI و AB

د) خطوط FG و EF

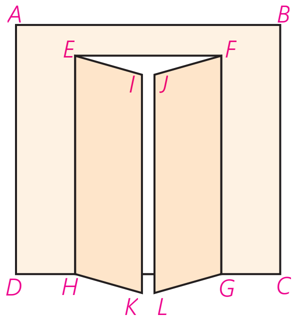
هـ) خطوط FG و HI







۴ــ تجسم کنید دو لنگهٔ در هرکدام ۳۰° باز شده‌اند، وضعیت خط‌ها و صفحه‌های زیر را مشخص کنید.



الف) وضعیت صفحه‌های EIKH و ABCD و JFGL را دو به دو نسبت به هم بررسی کنید.

ب) خط FJ و صفحهٔ EIKH

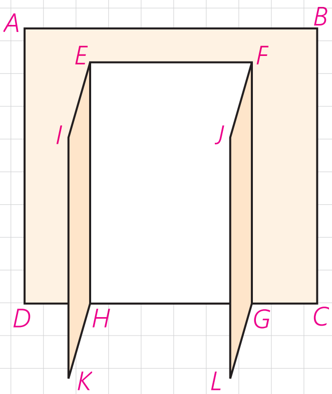
ج) خط JL و صفحهٔ EIKH

د) خط EH نسبت به هریک از صفحات

هـ) خطوط EI و JF

و) خطوط EI و FG

ز) خطوط FJ و BC



۵ــ تصور کنید دو لنگهٔ در هرکدام ۹۰° باز شده‌اند. وضعیت خط‌ها و صفحه‌های زیر را مشخص کنید.

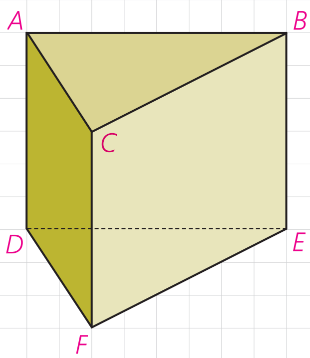
الف) وضعیت صفحات EIKH و ABCD و FGLJ را دو به دو نسبت به هم بررسی کنید.

ب) خط FJ و صفحهٔ EIKH

ج) خط JL و صفحهٔ EIKH

د) خطوط EI و FJ

هـ) خطوط FJ و HK



۶ــ منشور سه‌پهلوی روبه‌رو را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید :

الف) سه جفت خط متمایز دو به‌دو موازی نام ببرید.

ب) سه جفت خط متمایز دو به‌دو متنافر نام ببرید.

ج) سه جفت خط دو به‌دو متقاطع نام ببرید.

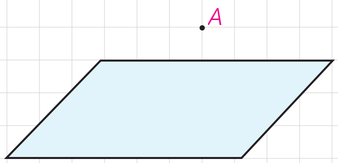
د) سه خط همرس نام ببرید.

هـ) سه جفت خط و صفحهٔ موازی نام ببرید.

و) دو صفحهٔ موازی نام ببرید.

ز) سه صفحهٔ دو به دو متقاطع نام ببرید.

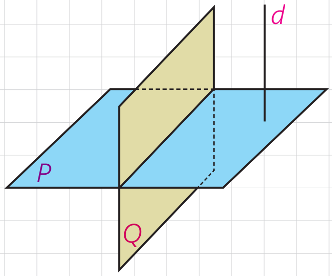
۷ــ از هر نقطه غیرواقع بر یک صفحه، چند خط می‌توان به آن صفحه عمود کرد؟



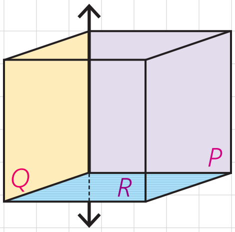
۸ــ از هر خط غیرواقع بر یک صفحه، چند صفحه می‌توان گذراند که بر آن صفحه عمود باشد؟

الف) خط بر صفحه عمود باشد.

ب) خط بر صفحه عمود نباشد.



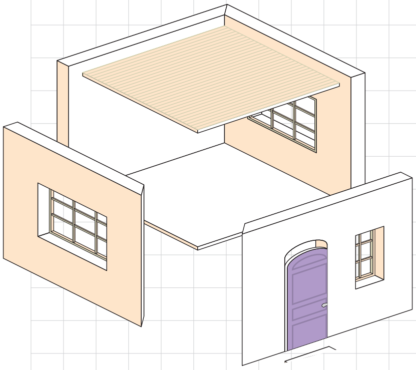
۹ــ دو صفحه P و Q برهم عمودند و خط d نیز بر صفحهٔ P عمود است. این خط نسبت به صفحهٔ Q چه وضعی دارد؟



۱۰ــ دو صفحهٔ متقاطع P و Q بر صفحهٔ R عمودند. فصل مشترک این دو صفحه نسبت به صفحهٔ R چه وضعیتی دارد؟

درس دوم

تفکر تجسمی

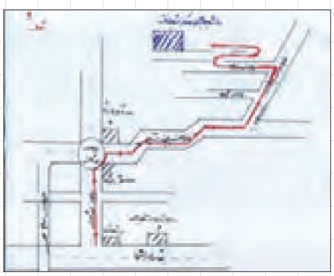


ــ چهرهٔ پدر یا مادر خود را در ذهن تصور کنید. چه ویژگی‌هایی دارند؟ به‌نظر شما اگر ده سال جوان‌تر یا ده سال پیرتر بودند به چه شکل بودند؟

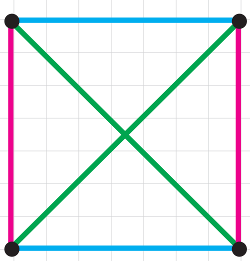


ــ در شکل روبه‌رو چند پرتقال روی میز چیده شده است؟

ــ سعی کنید برای دوستتان توصیف کنید که خانه‌تان به چه شکل است؟ تصور کنید یک اتاق کمتر یا آشپزخانهٔ بزرگ‌تری داشتید. در این صورت خانهٔ جدید، چه شکلی می‌توانست داشته باشد؟



ــ در بسیاری از موارد مانند آنچه در تصویر می‌بینید، لازم است تصویری از مسیر حرکتمان را ترسیم کنیم. شما هم طرح فوری[1] مسیر خانه تا مدرسه را برای دوستتان رسم کنید.



ــ در شکل روبه‌رو چه می‌بینید؟

ــ اگر بدانید که این تصویر به یک جسم هندسی مربوط است که از بالا به آن نگاه شده است، چه جسم هندسی را تصور می‌کنید؟

در تمام حالت‌های بالا شما در واقع از تفکر تجسمی خود استفاده کرده‌اید.

در تفکر تجسمی از عبارات و جملات و شیوه‌های زبانی برای تفکر استفاده نمی‌شود؛ بلکه این تصاویر هستند که در ذهن ما نقش می‌بندند و به ما کمک می‌کنند دربارهٔ موضوع مورد نظر فکر کنیم.

۱ــ «طرح فوری» با تصویب فرهنگستان به‌جای واژهٔ «کروکی» به‌کار می‌رود.

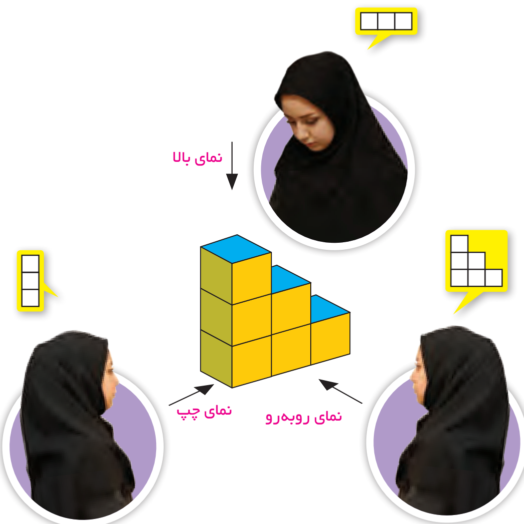
عکاس‌ها، نقاش‌ها، هنرمندان و بسیاری از انسان‌ها معمولاً می‌توانند متفاوت از سایرین به اطراف خود نگاه کنند. حتماً شما هم تصاویری مشابه تصاویر زیر دیده‌اید.







ــ تصویر روبه‌رو چه چیزی را به شما نشان می‌دهد؟



آیا می‌توان ادعا کرد که یکی از این تصاویر نسبت به بقیه کامل‌تر یا بهتر است؟

آیا می‌توان بدون چرخاندن شکل یا تغییر زاویهٔ دید، تمام این تصاویر را دید؟

آیا نمونه‌هایی شبیه به این موضوع را در زندگی واقعی دیده‌اید؟





نمای بالا

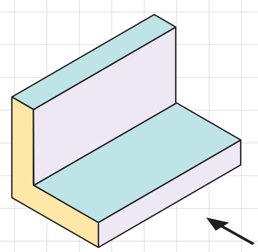


نمای چپ



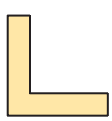
نمای روبه‌رو

تصویر زیر از نمای بالا، چپ و روبه‌رو رسم شده است.

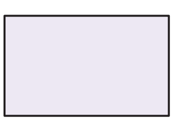




نمای بالا



نمای چپ

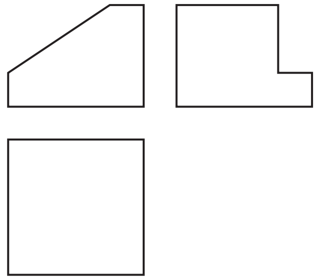


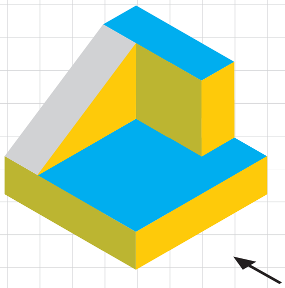
نمای روبه‌رو

در رسم نماهای مختلف، لحاظ کردن ارتفاع‌های متفاوت و رسم خطوط داخلی نما، مدنظر نیست، فقط در شکل‌هایی که به‌صورت شطرنجی، اندازه‌های دقیق داده شده، انتظار می‌رود در رسم نماهای مختلف، خطوط شطرنجی ترسیم شود.

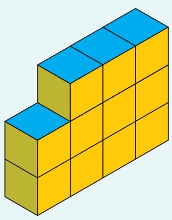
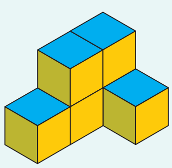
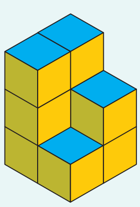
کار در کلاس

۱ــ شکل روبه‌رو از نماهای مختلف رسم شده است. مشخص کنید در هر تصویر از کدام جهت به شکل نگاه شده است؟





۲ــ سعی کنید از جهت‌های مختلف به هر شکل نگاه کرده و آن نما را رسم کنید.

نمای روبه‌رو	نمای بالا	نمای چپ	
			
			
			

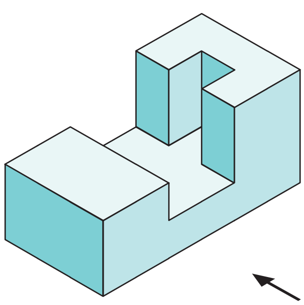
۳ــ دو مکعب مستطیل را روی هم قرار داده‌ایم. ابعاد مکعب مستطیل بالایی از مکعب مستطیل پایینی کمتر است. تصویری از این دو مکعب مستطیل رسم کنید که نمای روبه‌رو و نمای بالا را نشان دهد.

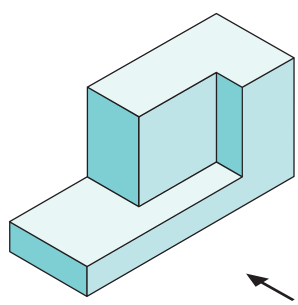
تمرین

۱ــ نمای روبه‌رو، چپ و بالای مکعب‌های سمت راست در ستون سمت چپ رسم شده است. هر شکل را به نماهای مربوط به آن وصل کنید.



۲ــ در هر شکل، نمای بالا، روبه‌رو و سمت چپ را رسم کنید.





۳ــ تمام وجه‌های مکعبی را رنگ‌آمیزی کرده‌ایم.

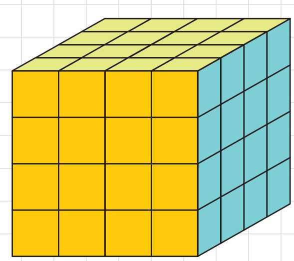
ــ چند مکعب کوچک در این شکل وجود دارد؟

ــ چند مکعب، رنگ نشده است؟

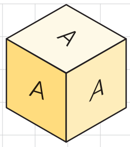
ــ چند مکعب، رنگ شده است؟

ــ چند مکعب، فقط دو وجه رنگ شده دارد؟

ــ چند مکعب، سه وجه رنگ شده دارد؟

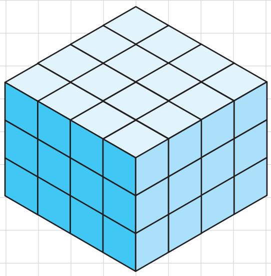


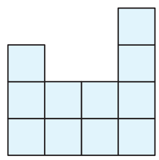
۴ــ روی تمام وجه‌های مکعب‌ها حرف A نوشته شده است. ۸ تا از این مکعب‌ها را به شکل ستونی روی هم می‌چینیم. چند حرف A دیده می‌شود؟



۵ــ شکل سمت چپ از چند مکعب کوچک تشکیل شده است؟

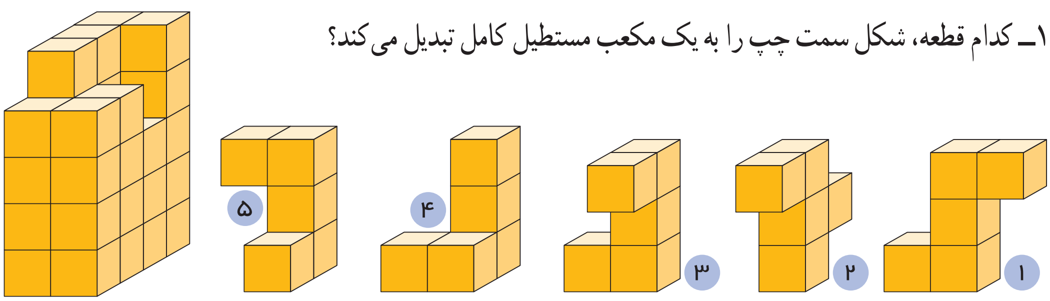
حداقل چند تا و حداکثر چند مکعب باید برداشته شود تا نمای بالا به این شکل باشد؟



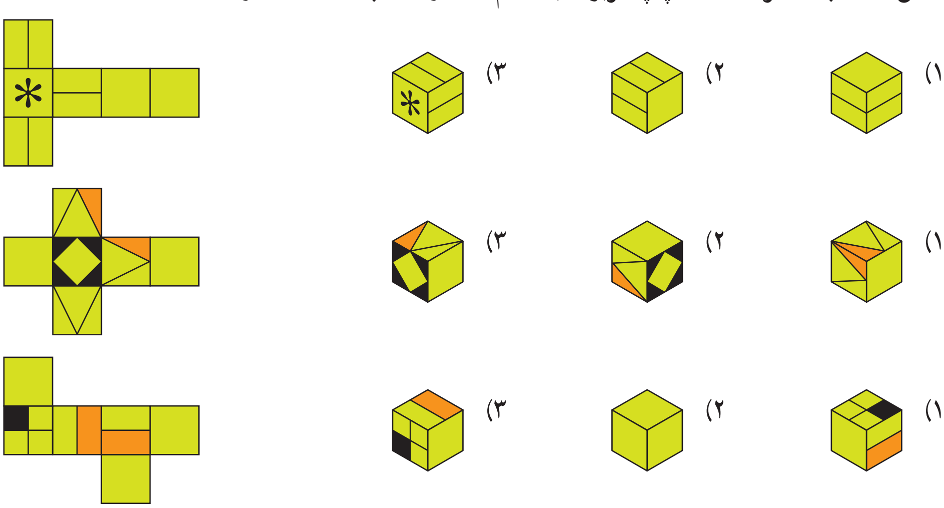


مجله ریاضی

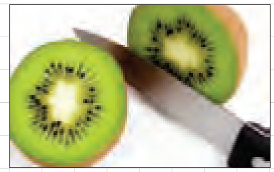
۱ــ کدام قطعه، شکل سمت چپ را به یک مکعب مستطیل کامل تبدیل می‌کند؟

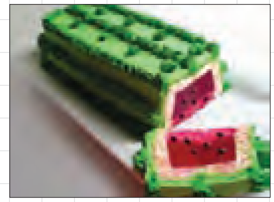


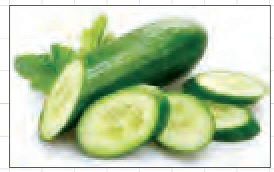
۲ــ در هر شکل، مکعب گستردهٔ سمت چپ مربوط به کدام‌یک از مکعب‌های سمت راست است؟



برش

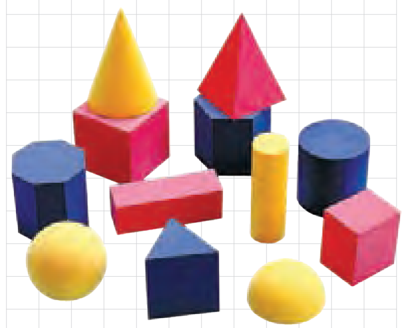






حتماً تا به‌حال ناچار شده‌اید که برای خوردن برخی میوه‌ها یا موادغذایی دیگر، آنها را برش بزنید. آیا همهٔ میوه‌ها به یک شکل برش زده می‌شوند و شکل هندسی یکسانی از برش زدن آنها به‌دست می‌آید؟

حال فرض کنید که می‌خواهیم یک جسم هندسی را برش بزنیم.



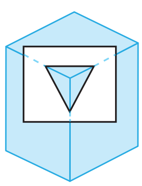
تعریف: شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، سطح مقطع آن نامیده می‌شود.

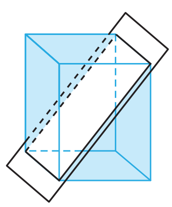
در سال‌های آینده با تعریف دقیق‌تر بیضی آشنا خواهید شد.

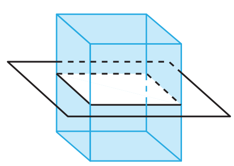
فعالیت

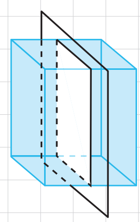
ـ بعضی از حالت‌های برخورد یک صفحه با یک مکعب مستطیل توخالی با قاعدهٔ مربع شکل، در زیر نمایش داده شده است. در هر یک از حالت‌ها سطح مقطع را مشخص کنید.



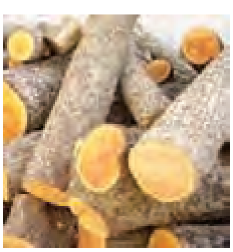


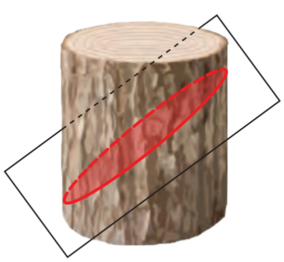


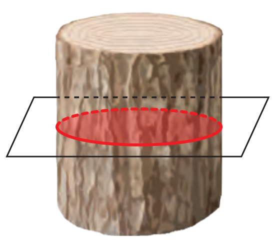


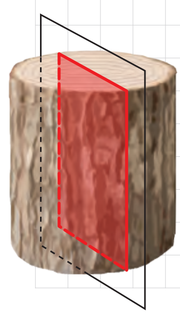


ـ سطح مقطع استوانه با صفحه‌های عمودی، افقی و صفحهٔ مایلی که با قاعده‌های استوانه متقاطع نباشد، به چه شکل است؟

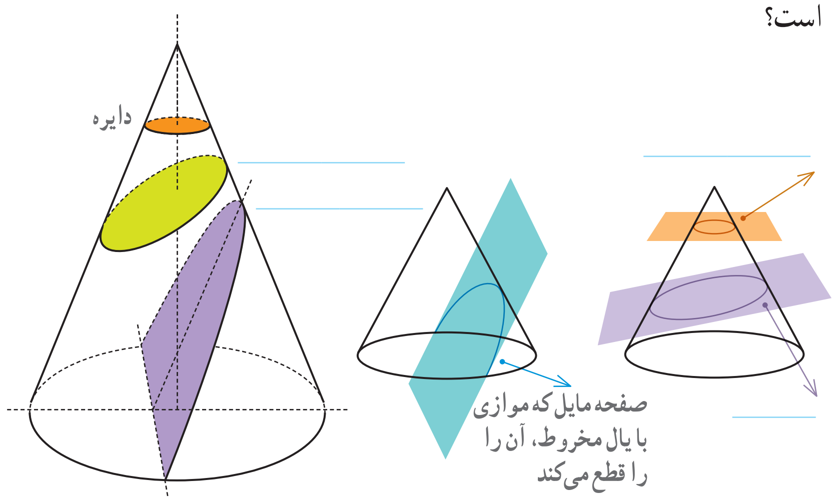




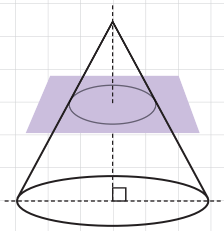




سطح مقطع یک مخروط قائم در برخورد با صفحه‌های افقی و مایل به چه شکل است؟

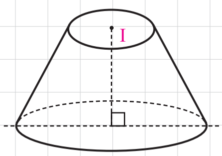


سهمی، بیضی و دایره جزء مقاطع مخروطی هستند. مقاطع مخروطی در مطالعهٔ مدار سیاره‌ها، ستاره‌های دنباله‌دار و قمرهای مصنوعی کاربرد زیادی دارند. همین‌طور در مطالعهٔ ساختار اتم‌ها، سامانه[1]‌های راهنمای هواپیماها، ساختن عدسی‌ها، وسایل نوری و وسایل پیش‌بینی هوا، ارتباطات قمرهای مصنوعی و ساختن پل‌ها به کار می‌روند.



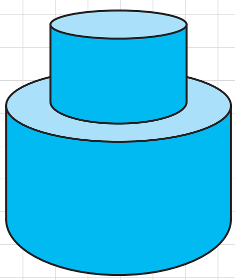
ــ مخروط قائمی را مطابق شکل با صفحه‌ای موازی قاعدهٔ آن برخورد داده‌ایم. این صفحه مخروط را به دو بخش تقسیم می‌کند. بخش بالایی به چه شکل است؟

بخش زیرین را **مخروط ناقص** می‌نامند.

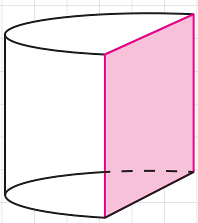


اگر صفحه‌ای به شکل عمودی مخروط ناقص را قطع کند و آن را به دو نیمه مساوی تقسیم کند، سطح مقطع حاصل چیست؟

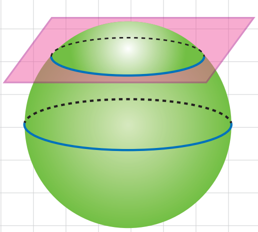
کاردرکلاس



۱ــ دو استوانه را روی هم قرار داده‌ایم. اگر صفحه‌ای به شکل عمودی با هر دو این استوانه‌ها برخورد کند، سطح مقطع حاصل به چه شکل خواهد بود؟



۲ــ در شکل روبه‌رو نصف یک استوانه داده شده است. سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه‌های افقی، عمودی و صفحهٔ مایلی که از قاعدهٔ استوانه عبور نکند به چه شکل است؟



۳ــ سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره به چه شکل است؟ در چه صورت این سطح مقطع بیشترین مساحت ممکن را خواهد داشت؟

۱ــ واژهٔ «سامانه» با تصویب فرهنگستان به‌جای واژهٔ «سیستم» به کار می‌رود.

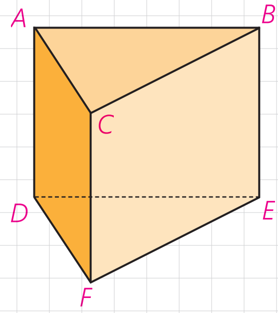
تمرین

۱ــ فرض کنید منشور سمت راست، یک قطعهٔ چوبی توپر باشد. این قطعهٔ چوبی را طوری اره می‌کنیم که از سه نقطهٔ مشخص عبور کند. در هر حالت مشخص کنید سطح مقطع به چه شکل است و منشور به چه شکل‌های فضایی تجزیه می‌شود؟

الف) M، N و P وسط پاره‌خط‌های BE، CF و AD

ب) C، D و E

ج) C، F و Q (وسط پاره خط AB)

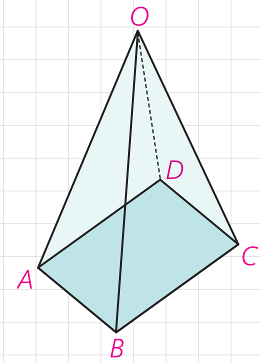


۲ــ قاعدهٔ هرمی، مستطیل ABCD است. رأس این هرم را O نامیده‌ایم. سطح مقطع حاصل از برخورد صفحهٔ P را با این هرم در هر حالت مشخص کنید.

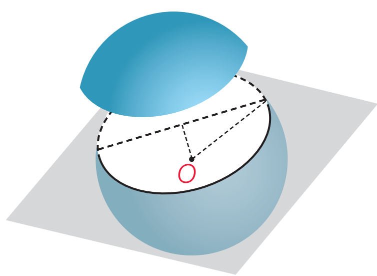
الف) صفحهٔ P بر ارتفاع هرم عمود باشد.

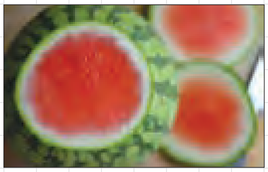
ب) صفحهٔ P از O بگذرد و بر قاعدهٔ هرم عمود باشد.

ج) صفحهٔ P از O نگذرد؛ ولی بر قاعدهٔ هرم عمود باشد.



۳ــ صفحهٔ P کره‌ای به مرکز O و شعاع ۵ سانتی‌متر را قطع کرده است.
اگر فاصلهٔ نقطهٔ O از صفحه ۳ سانتیمتر باشد، مساحت این سطح مقطع چقدر است؟







۴ــ دو کره با شعاع‌های r و r′ یکدیگر را قطع کرده‌اند. نقاط مشترک واقع بر روی هر دو کره روی چه شکلی قرار دارند؟

اگر همهٔ این نقاط را به مرکز یکی از دو کره وصل کنیم، چه شکلی به دست می‌آید؟

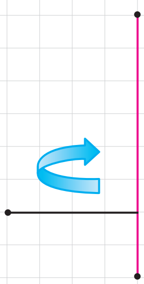


دوران حول محور

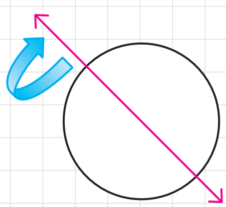
از دوران دادن شکل‌های متفاوت هندسی، حول یک محور می‌توان جسم‌های هندسی مختلفی را تصور کرد.



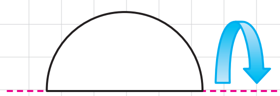




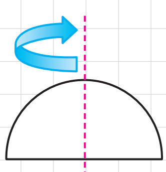
ــ فرض کنید دو پاره‌خط برهم عمودند و یکی را حول دیگری دوران داده‌ایم. چه شکل هندسی‌ای ساخته می‌شود؟



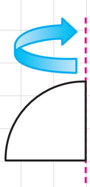
ــ دایره‌ای به شعاع r را حول یکی از قطرهای آن دوران داده‌ایم. شکل حاصل چیست؟



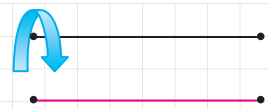
ــ یک نیم دایره را حول قطر دوران می‌دهیم. شکل حاصل چه خواهد بود؟



ــ اگر همین نیم دایره را حول شعاع عمود بر قطر داده شده دوران دهیم، چه شکلی ساخته می‌شود؟



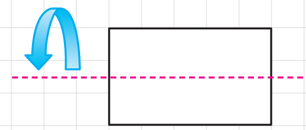
ــ اگر ربع یک دایره را حول شعاع مشخص شده دوران دهیم، شکل حاصل چه خواهد بود؟



ــ دو پاره‌خط موازی را در نظر بگیرید. اگر یکی از خطوط را حول دیگری دوران دهیم، چه جسم هندسی‌ای ساخته می‌شود؟

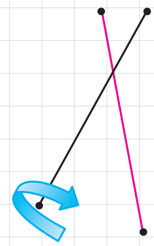


ــ اگر یک مستطیل را حول طول یا عرض آن دوران دهیم، چطور؟



ــ اگر مستطیل را مطابق شکل، حول محور داده شده دوران دهیم، شکل حاصل چه خواهد بود؟

تمرین



۱ــ دو پاره‌خط متقاطع را مطابق شکل درنظر بگیرید. اگر یکی از پاره‌خط‌ها را حول دیگری دوران دهیم، چه جسم هندسی‌ای ساخته می‌شود؟

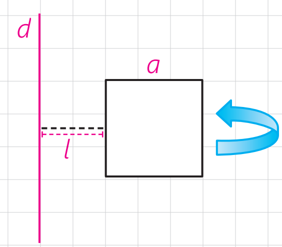
۲ــ در هر مورد مشخص کنید شکل حاصل از دوران چه خواهد بود؟ تصویر مناسبی رسم کنید.

الف) دوران یک مثلث متساوی‌الساقین حول ارتفاع آن :

ب) دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یک ضلع زاویهٔ قائمه :

پ) دوران یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه حول ضلع عمود بر قاعده‌ها :

ت) دوران یک مثلث متساوی‌الساقین حول قاعدهٔ آن :



۳ــ مربعی به ضلع a را حول محور d دوران داده‌ایم. شکل حاصل را توصیف کنید.

۴ــ شکل زیر را در نظر بگیرید. این شکل از دوران کدام شکل هندسی حول یک محور ساخته می‌شود؟ تصویر مناسبی برای آن رسم کنید.



